XI^{ème} OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DE L'ASIE DU PACIFIQUE 1999

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1. Trouver le plus petit nombre entier positif n ayant la propriété suivante: Il n'existe aucune de progression arithmétique de 1999 termes de nombres réels contenant exactement n nombres entiers.

Problème 2. Soit $a_1, a_2, \cdots$ une suite de nombres réels satisfaisant l'inégalité $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ pour tout $i, j = 1, 2, \cdots$. Montrer que

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

pour tout entier positif n.

Problème 3. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en P et Q. La tangente commune, plus près de P, de Γ_1 et Γ_2 touche Γ_1 au point A et Γ_2 au point B. La tangente de Γ_1 en P coupe Γ_2 au point C, différent de P et l'extension de AP rencontre BC au point R. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PQR est tangent à BP et à BR.

Problème 4. Déterminer tous les couples (a, b) de nombres entiers ayant la propriété que les nombres $a^2 + 4b$ et $b^2 + 4a$ soient tous deux des carrés parfaits.

Problème 5. Soit S un ensemble de $2n+1$ points du plan de sorte qu'aucun trois d'entre eux ne soient colinéaires, et qu'aucun quatre d'entre eux ne soient cocycliques. Un cercle sera dit *bon* s'il comporte 3 points de S sur sa circonférence, $n-1$ points dans son intérieur et $n-1$ points dans son extérieur. Montrer que le nombre de bons cercles possède la même parité que n.