XIV^{ème} OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DE L'ASIE DU PACIFIQUE Mars 2002

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1.

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ une suite d'entiers non négatifs, où n est un entier positif. Soit maintenant

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} .$$

Montrer que

$$a_1! a_2! \ldots a_n! \geq (\lfloor A_n \rfloor !)^n ,$$

où $\lfloor A_n \rfloor$ dénote le plus grand entier plus petit ou égal à A_n, et $a! = 1 \times 2 \times \cdots \times a$ pour $a \geq 1$ (et $0! = 1$). Quand a-t'on égalité?

Problème 2.

Trouver tous les entiers positifs a et b tels que

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

soient tous deux des entiers.

Problème 3.

Soit ABC un triangle équilatéral. Soit P un point sur le côté AC et Q un point sur le côté AB de sorte que les deux triangles ABP et ACQ soient aigus. Soit maintenant R l'orthocentre du triangle ABP et S l'orthocentre du triangle ACQ. Posons T le point commun des segments de droites BP and CQ. Trouver toutes les valeurs possibles de $\angle CBP$ et $\angle BCQ$ de sorte que le triangle TRS soit équilatéral.

Problème 4.

Soient x, y, z des nombres positifs tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Montrer que

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Problème 5.

Soit $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R}$ satisfaisant:
(i) il n'y ait seulement qu'un nombre finit de s dans $\mathbf{R}$ tels que $f(s) = 0$, et
(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ pour tous x, y dans $\mathbf{R}$.