PROBLÈMES POUR FÉVRIER 2006

Veuillez envoyer vos solutions à

Ms. Valeria Pandelieva
141 Kirkwood Avenue
Ottawa, ON K1Z 5X5

au plus tard le 28 mars 2006. Il est important que votre adresse postale et votre adresse courriel apparaissent en première page. Si vous écrivez votre nom de famille avant votre prénom, soulignez-le.

Note: Soit un triangle, dont on prolonge deux des cotés. Le cercle tangent à ces prolongements et extérieurement tangent au troisième coté du triangle est un cercle excrit. Le centre de ce cercle se nomme centre excrit, et se retrouve à la fois sur la bissectrice de l'angle opposé au troisième coté du triangle et sur la bissectrice des angles externes formées par chacun des prolongenents avec le troisième coté. Tout triangle admet trois cercles excrit différents avec leur cercle inscrit.

Le cercle inscrit d'un polygone est un cercle à l'intérieur du polygone et tangent à tous les cotés de ce dernier. Bien que tout triangle possède un cercle inscrit, ce n'est pas le cas pour tous les polygones.

430. Soit le triangle ABC tel que son cercle excrit tangent au coté AB est aussi tangent au cercle dont le diamètre est le segment BC. Si les longeurs des cotés BC, CA et AB sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une série arithmétique, trouver la mesure de l'angle ACB.

431. Prouver l'identité trigonométrique suivante:

$$\sin\frac{\pi}{4n+2}\cdot\sin\frac{3\pi}{4n+2}\cdot\sin\frac{5\pi}{4n+2}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n+2}=\frac{1}{2^n}\ .$$

432. Trouver la valeur exacte:

(a)

$$\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{5}}{18}}-\sqrt{\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{5}}{18}}\ ;$$

(b)

$$\sqrt{1+\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{6}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{8}}\cdots\sqrt{1+\frac{2}{57}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{58}}\ .$$

433. Prouver que l'équation:

$$x^2+2y^2+98z^2=77777\ldots777$$

ne possède aucune solution entière, si le terme de droite possède 2006 chiffres dans son écriture décimale, tous égaux à 7.

434. Trouver tout les entiers naturels n pour lesquels 2^n+n^{2004} représente un nombre premier.

435. Un cercle de centre I est inscrit dans un quadrilatère convexe $ABCD$. Les diagonales AC et BD se coupent au point E. Prouvez que, si les points milieu des segments AD, BC et IE sont colinéaires, alors $AB=CD$.

436. Dans un tournoi européen euro-africain, il y a 9 équipes européenes de plus que d'équipes africaines. Au total, les européens ont gagnées 9 fois le total des points des équipes africaines. Dans ce tournoi, chaque équipe joue exactement 1 fois contre chaque équipe. Il n'y a pas de parties nulle. Le gagnant d'une partie remporte 1 point, le perdant 0. Quel est le plus grand pointage possible pour la meilleure équipe africaine?