Olympiade mathématique du Canada
1979

Problème 1

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Si a, A_1, A_2, b est une progression arithmétique, et si a, G_1, G_2, b est une progression géométrique, montrer que

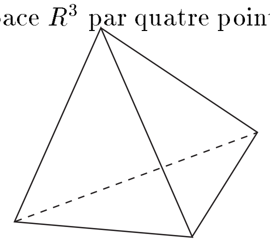
$$A_1 A_2 \geq G_1 G_2.$$

Problème 2

On sait en géométrie euclidienne que la somme des angles d'un triangle est constante. Montrer, par contre, que la somme des angles dièdres d'un tétraèdre n'est *pas* constante.

N. B. (i) Un tétraèdre est la figure formée dans l'espace R^3 par quatre points non coplanaires.

(ii) Un dièdre est la figure formée par deux demi-plans ayant même frontière. Un angle dièdre est l'un quelconque des angles déterminés par la section d'un dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.



Problème 3

Soient a, b, c, d, e des entiers tels que

$$1 \leq a < b < c < d < e.$$

Montrer que

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16},$$

où $[m,n]$ désigne le plus petit commun multiple de m et n (par exemple $[4,6] = 12$).

Problème 4

Un chien se trouvant au centre d'une arène circulaire entourée d'un mur aperçoit un lapin au pied du mur. Le lapin court le long du mur, et le chien le poursuit le long d'une trajectoire unique déterminée en courant à la même vitesse et en restant constamment sur la ligne radiale joignant le centre de l'arène au lapin.

Montrer que le chien rejoint le lapin à l'instant précis où ce dernier a accompli un quart du tour de l'arène.

PROBLÈME 5

Une promenade aléatoire dans le plan consiste en une suite de pas de longueur 1 effectués dans l'une quelconque des directions nord, sud, est, ouest. Une promenade aléatoire est dite “sans point double” si elle ne passe jamais deux fois par le même point. Soit $f(n)$ le nombre de promenades de n pas, issues de l'origine, et qui sont sans point double. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ et montrer que

$$2^n < f(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}.$$