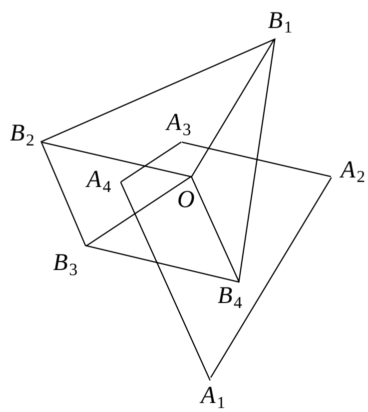
Olympiade mathématique du Canada
1982

PROBLÈME 1

Sur la figure, OB_i est parallèle à A_iA_{i+1} et de même longueur, pour $i = 1, 2, 3, 4$ $A_5 = A_1$). Montrer que l'aire de $B_1B_2B_3B_4$ est égale au double de celle de $A_1A_2A_3A_4$.



PROBLÈME 2

Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

(i) Montrer que a, b, c sont distinctes.

(ii) Montrer que

$$\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$$

est un entier.

PROBLÈME 3

Soit R^n l'espace euclidien de dimension n. Trouver le plus petit nombre $g(n)$ de points d'un ensemble dans R^n ayant le propriété que tout point de R^n est à distance irrationnelle d'au moins un point de cet ensemble.

PROBLÈME 4

Soit p une permutation de l'ensemble $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. On dit qu'un élément $j \in S_n$ est un point fixe de p si $p(j) = j$. Soit f_n le nombre de permutations qui n'ont aucun point fixe, et g_n le nombre de celles qui ont exactement un point fixe. Montrer que $|f_n - g_n| = 1$.

Problème 5

On prolonge les hauteurs d'un tétraèdre $ABCD$ vers l'extérieur jusqu' aux points A', B', C', D' respectivement, où $AA' = k/h_a$, $BB' = k/h_b$, $CC' = k/h_c$, $DD' = k/h_d$, et où k est une constante, h_a dénote la longueur de la hauteur de $ABCD$ issue du sommet A, *etc.* Montrer que le centre de gravité du tétraèdre $A'B'C'D'$ coincide avec celui de $ABCD$.