Olympiade mathématique du Canada
1984

Problème 1

Montrer que la somme des carrés de 1984 entiers positifs consécutifs ne peut pas être le carré d'un entier.

Problème 2

Alice et Robert sont dans un magasin de quincaillerie, où l'on vend des gaines colorées en plastique pour distinguer les clefs. On entend la conversation suivante:

Alice: Tu devrais identifier tes clefs.

Robert: J'aimerais bien, mais il n'y a que 7 couleurs et j'ai 8 clefs.

Alice: Oui, mais tu pourrais toujours distinguer une clef en remarquant que la clef rouge voisine de la verte est différente de la clef rouge voisine de la bleue.

Robert: Tu dois faire attention à ce que tu entends par "voisine de" ou "trois clefs plus loin que...", car on peut retourner l'anneau porte-clef, et les clefs sont rangées en cercle.

Alice: Malgré cela tu n'as pas besoin de 8 couleurs.

Problème: Quel est le nombre minimum de couleurs requis pour distinguer n clefs, si chacune doit être colorée?

Problème 3

Un entier est "digitalement divisible" si:

(a) aucun de ses chiffres n'est zéro;

(b) il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple 322 est digitalement divisible.

Montrer qu'il existe un infinité d'entiers digitalement divisibles.

Problème 4

On considère un triangle d'aire unité et dont les 3 angles sont aigus. Montrer qu'il existe un point intérieur dont la distance à chacun des sommets est au moins égale a $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$.

Problème 5

Etant donné 7 nombres réels, démontrer qu'il en est deux parmi eux, notés x et y, tels que,

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$