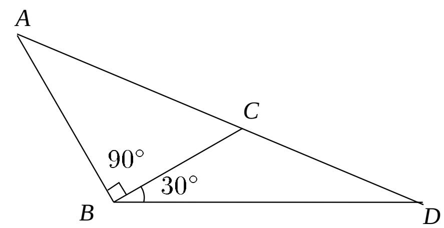
Olympiade mathématique du Canada
1986

Problème 1

D'après le diagramme, les segments AB et CD sont de longueur 1 et les angles ABC et CBD ont respectivement 90° et 30°. Trouver AC.



Problème 2

Un Mathlon est une compétition sportive comprenant M épreuves d'athlétisme. Une telle compétition a eu lieu pour trois athlètes A, B et C. Pour chacune des épreuves, un pointage p_1 a été attribué pour la première place, p_2 pour la seconde et p_3 pour la troisième, p_1, p_2 et p_3 étant des nombres entiers tels que $p_1 > p_2 > p_3 > 0$. Le résultat final de A est de 22 points, celui de B est de 9 points et celui de C est de 9 points. B a remporté le 100 mètres. Trouver la valeur de M ainsi que l'athlète qui a obtenu la seconde place pour le saut en hauteur.

Problème 3

Une corde ST de longueur constante est tendue sur la circonférence d'un demi-cercle dont le diamètre est AB. M est le point se trouvant au milieu de ST et P est le point d'intersection avec AB de la perpendiculaire élevée de S sur AB. Démontrer que l'angle SPM est de grandeur constante pour toute position de ST.

Problème 4

Étant donnés les entiers positifs n et k, définissons $F(n,k) = \sum_{r=1}^{n} r^{2k-1}$. Démontrer que $F(n,1)$ divise $F(n,k)$.

Problème 5

Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ une suite de nombres satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$ avec $u_1 = 39$ et $u_2 = 45$. Démontrer que 1986 divise une infinité de termes de la suite.