Olympiade mathématique du Canada
1988

Problème 1

Pour quelles valeurs de b les deux équations

$$1988x^2 + bx + 8891 = 0 \text{ et } 8891x^2 + bx + 1988 = 0$$

ont-elles une racine commune?

Problème 2

La fondation d'une maison a la forme d'un triangle de périmètre P mètres et une surface de A mètres carrés. Le jardin par ailleurs correspond au terrain à moins de 5 mètres de la maison. Calculer donc la superficie totale du terrain occupé par la maison et le jardin.

Problème 3

Soit S un ensemble fini comptant au moins cinq points du plan cartésien; de plus ces points sont colorés rouges ou bleus. Aucun des sous-ensembles de même couleur n'est colinéaire. Montrer alors qu'il existe un triangle dont

(i) les sommets sont de même couleur, et

(ii) au moins un des côtés du triangle ne contient pas de point de l'autre couleur.

Problème 4

Posons $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Montrer que $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$ pour tout $n \geq 0$.

Problème 5

Soit $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ une suite de nombres entiers. Pour toute sous-suite non vide A de S, on pose $p(A)$ comme étant le produit de tous les éléments de A. Soit maintenant $m(S)$ la moyenne arithmétique de $p(A)$ prise sur tous les sous-ensembles non vides A de S. Si $m(S) = 13$ et si $m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$ pour un entier positif a_{r+1}, déterminer alors les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et a_{r+1}.