# Olympiade mathématique du Canada
# 1994

PROBLÈME 1

Évaluer la somme

$$\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

PROBLÈME 2

Montrer que chaque puissance entière positive de $\sqrt{2}-1$ est de la forme $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ pour un certain nombre entier positif $m$. (ex. $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$).

PROBLÈME 3

Vingt-cinq hommes sont assis autour d'une table ronde. À chaque heure, on prend un vote dont chacun doit répondre *oui* ou *non*. Chacun se comporte comme suit: au $n^{\text{ième}}$ vote, si sa réponse est la même qu'au moins un de ses deux voisins, alors il répondra de la même façon au vote suivant; mais si sa réponse est différente de celles de ses deux voisins, alors il votera différemment au prochain vote. Montrer que, quel que soit le vote de chacun au premier tour, on se trouvera à un certain temps dans la situation où chacun ne changera plus son vote.

PROBLÈME 4

Soit $AB$ un diamètre d'un cercle $\Omega$ et $P$ un point *n'étant pas* sur la droite passant par $A$ et $B$. Supposons maintenant que la droite passant par $P$ et $A$ coupe $\Omega$ aussi en $U$, et que la droite passant par $P$ et $B$ coupe $\Omega$ aussi en $V$. (Remarquons qu'en cas de tangence, $U$ peut coïncider avec $A$ ou $V$ peut coïncider avec $B$. De plus, si $P$ est sur $\Omega$, alors $P = U = V$.) Supposons de plus que $|PU| = s|PA|$ et que $|PV| = t|PB|$ pour des nombres réels non négatifs $s$ et $t$. Déterminer le cosinus de l'angle $APB$ en termes de $s$ et $t$.

PROBLÈME 5

Soit $ABC$ un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit $AD$ la hauteur sur $BC$, et soit $H$ un point intérieur au triangle sur $AD$. Les droites $BH$ et $CH$, si étendues, coupent $AC$ et $AB$ en $E$ et $F$ respectivement. Montrer que $\angle EDH = \angle FDH$.