Olympiade mathématique du Canada 1997

PROBLÈME 1

Combien de paires d'entiers positifs x, y y a-t'il, si $x \leq y$, $\text{pgcd}(x, y) = 5!$ et $\text{ppcm}(x, y) = 50!$.

REMARQUE. $\text{pgcd}(x, y)$ signifie le plus grand commun diviseur de x et y, et $\text{ppcm}(x, y)$ signifie le plus petit commun multiple de x et y, et finalement $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

PROBLÈME 2

L'intervalle fermé $A = [0, 50]$ est une réunion d'un nombre fini d'intervalles fermés, chacun de longueur 1. Montrer que certains de ces intervalles puissent être retirés de sorte que ceux restant soient deux à deux disjoints et aient une longueur totale ≥ 25.

REMARQUE. Etant donné $a \leq b$, la longueur de l'intervalle fermé $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est $b - a$; des intervalles disjoints ont une intersection *vide*.

PROBLÈME 3

Montrer que

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$$

PROBLÈME 4

Soit O un point situé à l'intérieur du parallélogramme $ABCD$ de sorte que

$$\angle AOB + \angle COD = 180°.$$

Montrer que $\angle OBC = \angle ODC$.

PROBLÈME 5

Écrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24},$$

sous la forme $\frac{p(n)}{q(n)}$, où p et q sont des polynômes dont les coefficients sont entiers.