Financière Sun Life

43$^{\text{e}}$ Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 23 mars 2011

CMS
SMC

---

(1) Considérer les nombres n à 70 chiffres avec la propriété que chacun des chiffres $1, 2, 3, \ldots, 7$ apparaît dix fois dans l'expension décimale de n (et que 8, 9 et 0 n'y apparaissent pas). Montrer qu'aucun nombre de cette forme ne peut être divisé par un autre nombre de la même forme.

(2) Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les côtés opposés ne sont pas parallèles, X l'intersection de AB et de CD, et Y l'intersection de AD et de BC. Supposons que la bissectrice de $\angle AXD$ intersecte AD, BC en E, F respectivement et que la bissectrice de $\angle AYB$ intersecte AB, CD en G, H respectivement. Montrer que $EGFH$ est un parallèlograme.

(3) Amy a divisé un carré en un nombre fini de plusieurs rectangles blancs et rouges, chacun ayant les côtés parallèles aux côtés du carré. À l'intérieur de chaque rectangle blanc, elle écrit sa largeur divisée par sa hauteur. À l'intérieur de chaque rectangle rouge, elle écrit sa hauteur divisée par sa largeur. Finalement, elle calcule x, la somme de tous ces nombres. Si l'aire totale des rectangles blancs égale l'aire totale des rectangles rouges, quelle est la plus petite valeur de x possible?

(4) Démontrer qu'il existe un entier positif N tel que pour tout entier $a > N$, il existe une sous-chaîne contiguë de l'expansion décimale de a qui est divisible par 2011. (Par exemple, si a =153204, alors 15, 532, et 0 sont toutes des sous-chaînes contiguës de a. Notez bien que 0 est divisible par 2011.)

(5) Soit d un entier positif. Démontrer que, pour tout entier S, il existe un entier $n > 0$ et une suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, où pour tout k, $\epsilon_k = 1$ ou $\epsilon_k = -1$, tel que

$$S = \epsilon_1(1+d)^2 + \epsilon_2(1+2d)^2 + \epsilon_3(1+3d)^2 + \cdots + \epsilon_n(1+nd)^2.$$