# Olympiade mathématique du Canada 2017

## Examen

1. Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels non-négatifs, deux à deux distincts. Montrer que
$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}>2.$$

2. Soit $f$ une fonction de l'ensemble de tous les entiers positifs dans lui-même telle que le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de $n$ est égal à $f(f(n))$ pour tout $n$. Par exemple, $f(f(6)) = 4$ et $f(f(25)) = 3$. Montrer que si $p$ est un nombre premier, alors $f(p)$ est aussi un nombre premier.

3. Soit $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ où $n$ est un entier positif. Considérer un sous-ensemble non vide $T$ de $S$. On dit que $T$ est équilibré si la médiane de $T$ est égale à la moyenne de $T$. Par example, pour $n = 9$, chacun des sous-ensembles $\{7\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 8, 9\}$ et $\{1, 4, 5, 7, 8\}$ est équilibré. Par contre, les sous-ensembles $\{2, 4, 5\}$ et $\{1, 2, 3, 5\}$ ne sont pas équilibrés. Pour tout $n \geq 1$, montrer que le nombre de sous-ensembles équilibrés de $S$ est impair.
(Pour définir la médiane d'un ensemble de $k$ nombres, on commence par arranger les nombres en ordre croissant; la médiane est le nombre au milieu si $k$ est impair, et la moyenne des deux nombres au milieu si $k$ est pair. Par exemple, la médiane de $\{1, 3, 4, 8, 9\}$ est 4, et la médiane de $\{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ est $(4 + 7)/2 = 5,5$.)

4. Les points $P$ et $Q$ sont à l'intérieur d'un parallélogramme $ABCD$ de sorte que les triangles $ABP$ et $BCQ$ soient équilatéraux. Montrer que la droite qui passe par $P$ et qui est perpendiculaire à $DP$ et la droite qui passe par $Q$ et qui est perpendiculaire à $DQ$ se coupent en un point sur la hauteur issue du point $B$ dans le triangle $ABC$.

5. Cent cercles de rayon un sont positionnés dans le plan de sorte que l'aire de n'importe quel triangle formé par les centres de trois de ces cercles soit au plus 2017. Montrer qu'il existe une droite dans le plan qui coupe au moins trois de ces cercles.