

Olympiade mathématique du Canada 2019

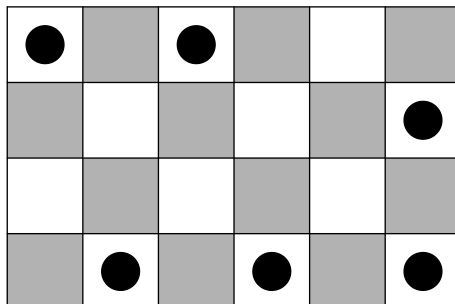
Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.



Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : <https://smc.math.ca/Concours/Commanditaires/>

Examen officiel

- Amélie a placé les points A , B et C dans le plan de façon à ce que $AB = BC = CA = 6$. Elle peut ensuite placer un nouveau point s'il s'agit du centre du cercle circonscrit d'un triangle dont les sommets sont déjà placés dans le plan. Par exemple, elle peut placer le centre O du cercle circonscrit du triangle ABC et ensuite placer le centre du cercle circonscrit du triangle ABO .
 - Démontrez qu'Amélie peut éventuellement placer un point dont la distance à un point déjà placé est supérieure à 7.
 - Démontrez qu'Amélie peut éventuellement placer un point dont la distance à un point déjà placé est supérieure à 2019.
- Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $a+b^3$ est divisible par $a^2+3ab+3b^2-1$. Démontrez que $a^2+3ab+3b^2-1$ est divisible par le cube d'un entier supérieur à 1.
- Soit m et n des entiers strictement positifs. Une grille $2m \times 2n$ de carrés est colorée à la manière d'un échiquier standard. Déterminez le nombre de façons de placer mn jetons sur les carrés blancs, au plus un jeton par carré, de façon à ce que deux jetons ne soient jamais sur des cases diagonalement adjacentes. Un exemple d'une façon de placer les jetons pour $m = 2$ et $n = 3$ est montrée plus bas.



Olympiade mathématique du Canada 2019

4. Soit n un entier supérieur à 1 et soit a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels tels que $a_1 = a_{n-1} = 0$. Démontrez que pour n'importe quel nombre réel k ,

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$

5. David et Jacob jouent à un jeu qui consiste à relier $n \geq 3$ points du plan. Trois points ne sont jamais colinéaires. À son tour, un joueur choisit deux points à relier par un nouveau segment de droite. Le premier joueur à compléter un cycle qui consiste en un nombre impair de segments de droite perd la partie. (Les extrémités de chaque segment de droite du cycle doivent faire partie des n points donnés et non ceux qui sont formés par les intersections des segments tracés.) Si David débute la partie, trouvez toutes les valeurs de n pour lesquelles il a une stratégie gagnante.

Important !

Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures.
