Olympiade mathématique du Canada 2000

Problème 1
À midi (12h00), Anne, Beth et Carmen commencent à courir autour d'une piste circulaire ayant une longueur de trois cents mètres, en partant toutes du même point. Chaque coureuse maintient une vitesse constante dans l'une des deux directions possibles pendant une période du temps indéterminée. Démontrer que si la vitesse d'Anne est différente des vitesses des autres coureuses, alors à un certain moment, Anne sera à au moins cent métres de chacune des deux autres filles. (La distance se mesure ici le long du plus petit des deux arcs séparant deux coureuses.)

Solution 1
Premère solution: Quitte à modifier le point de référence, on peut supposer que la vitesse d'Anne est nulle, que Beth court au moins deux fois plus vite que Carmen et que la vitesse de Carmen est positive. Si la vitesse de Beth ne dépasse pas deux fois celle de Carmen, alors ces deux coureuses se trouvent à au moins 100 mètres d'Anne au moment où Carmen a parcouru 100 mètres. Si la vitesse de Beth est plus que deux fois celle de Carmen, alors Beth franchie une partie du parcours de plus de 200 mètres durant l'intervalle de temps qu'il faut à Carmen pour courir une distance de 100 à 200 mètres. Une partie de ce parcours se situe à plus de 100 mètres d'Anne. Cela signifie qu'il y a un intervalle du temps pendant lequel Beth et Carmen se trouvent toutes les deux à au moins (en fait, c'est même plus de) 100 mètres d'Anne.

Deuxième solution: Quitte à modifier le point de référence, on peut supposer que la vitesse d'Anne est nulle et que la vitesse de chacune des deux autres coureuses est non nulle. On peut également supposer que Beth court au moins aussi vite que Carmen. Supposons qu'il faut plus de t secondes pour Beth puisse courir 200 mètres. Alors, à tout instant dans l'ensemble infini $T = \{t, 2t, 4t, 8t, ...\}$, Beth se trouve à exactement 100 mètres d'Anne. Au temps t, Carmen a parcouru exactement d mètres, où $0 < d \leq 200$. Soit k le plus petit entier positif pour lequel $2^k d \geq 100$. Alors $k \geq 0$ et $100 \leq 2^k d \leq 200$, de sorte qu'au temps $2^k t \in T$, Beth et Carmen se trouvent toutes les deux à au moins 100 mètres d'Anne.

Problème 2
Une *permutation* des entiers $1901, 1902, \ldots, 2000$ est une suite $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dans laquelle chacun de ces entiers apparaît exactement une fois. Étant donnée

une telle permutation, on considére la suite des sommes partielles

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_{100} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}. \end{aligned}$$

Parmi toutes les permutations, combien auront la propriété que la suite des sommes partielles correspondante ne contient aucun terme qui est un multiple de 3?

SOLUTION 2

Écrivons $\{1901, 1902, \ldots, 2000\} = R_0 \cup R_1 \cup R_2$, où chaque entier dans R_i est congrue à i modulo 3. Observons que $|R_0| = |R_1| = 33$ et $|R_2| = 34$. Chaque permutation $S = (a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ peut être déterminée de façon unique en décrivant une suite $S' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{100})$ de restes dans la division par 3 (contenant exactement 33 zéros, 33 uns et 34 deux), et trois permutations (une de chacun des ensembles R_0, R_1 et R_2). Notons que le nombre de permutations de R_i est égale à $|R_i|! = 1 \cdot 2 \cdots |R_i|$.

La condition sur les sommes partielles de S dépend seulement de la suite des restes S'. Afin d'éviter une somme partielle divisible par trois, la sous-suite formée par les 67 uns et deux dans S' doit être $1, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2$ ou $2, 2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1$. Comme $|R_2| = |R_1| + 1$, seule la deuxième configuration est possible. Les 33 zéros de S' peuvent se trouver n'importe où parmi $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{100}$ pourvu que $a'_1 \neq 0$. Il y a $\binom{99}{33} = \frac{99!}{33!\,66!}$ façons de choisir lesquelles des termes de S' sont nuls. Par conséquent, il y a $\binom{99}{33}$ suites dans S' dont les sommes partielles ne sont pas divisibles par trois. Ainsi le nombre total de permutations de S satisfaisant la condition est exactement

$$\binom{99}{33} \cdot 33! \cdot 33! \cdot 34! = \frac{99! \cdot 33! \cdot 34!}{66!}.$$

Par ailleurs, ce nombre vaut approximativement $4.4 \cdot 10^{138}$.

PROBLÈME 3

Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2000})$ une suite de nombres entiers dont chaque terme se trouve dans l'intervalle $[-1000, 1000]$. Supposons que la somme des éléments de A est égale à 1. Démontrer qu'il existe un sous ensemble non vide de A dont la somme des éléments est nulle.

Solution 3

Nous pouvons supposer que que les termes de A sont tous non nuls. On réordonne les termes de A pour obtenir une nouvelle suite $B = (b_1, \ldots, b_{2000})$ de sorte que $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ et, pour chaque $i = 2, 3, \ldots, 2000$, b_i est de signe opposé à celui de la somme partielle

$$s_{i-1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}.$$

(On peut supposer que chaque $s_{i-1} \neq 0$, car sinon il n'y a rien à montrer.) À chaque étape de ce processus de sélection, un candidat pour b_i existe car la condition $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2000} = 1$ implique que la somme des termes de A qui sont toujours disponibles est soit nulle, soit de signe opposé à celui de s_{i-1}.

Par construction, chaque $s_1, s_2, \ldots, s_{2000}$ est l'un des 1999 entiers non nuls dans l'intervalle $[-999, 1000]$. Par le principe de Dirichlet, $s_j = s_k$ pour certains j, k avec $1 \leq j < k \leq 2000$. Donc $b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_k = 0$, ce qui complète la démonstration.

Problème 4

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dans lequel

$$\begin{aligned} \angle CBD &= 2\angle ADB, \\ \angle ABD &= 2\angle CDB \text{ et} \\ AB &= CB. \end{aligned}$$

Montrer que $AD = CD$.

Solution 4

Première solution: (donnée par Keon Choi) Prolongeons DB jusqu'au point P qui se trouve sur le cercle passant par A et C et du centre B. Alors $\angle CPD = \frac{1}{2}\angle CBD = \angle ADB$ et $\angle APD = \frac{1}{2}\angle ABD = \angle CDB$. Ceci montre que $APCD$ est un parallélogramme. La droite PD étant la médiatrice de AC, on déduit que BD est une bissectrice du triangle isocèles ABC. On a

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABD = \angle CDB.$$

Donc DB est la bissectrice de $\angle ADC$. Comme DB est la médiatrice de la base du triangle ADC, ce triangle doit être isocèle et il s'ensuit que $AD = CD$.

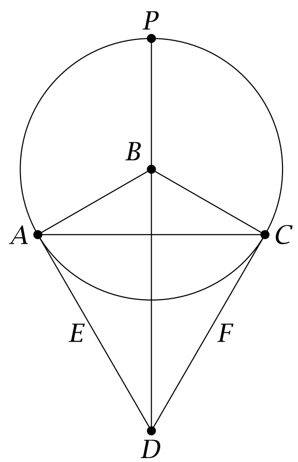

Figure pour la première solution

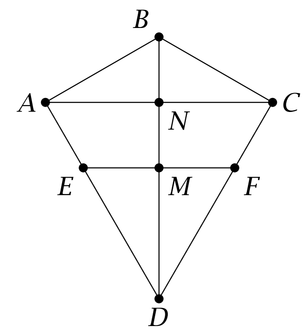

Figure pour la deuxième solution

Deuxième solution: Notons par E le point d'intersection de la bissectrice de $\angle ABD$ avec AD et par F le point de rencontre de la bissectrice de $\angle CBD$ avec CD. Alors $\angle FBD = \angle BDE$ et $\angle EBD = \angle BDF$, ce qui implique que $BD \parallel FD$ et $BF \parallel ED$. Donc $BDEF$ est un parallélogramme. D'où

$$BD \text{ rencontre } ED \text{ en son milieu} M. \tag{1}$$

D'autre part, comme BE est une bissectrice, on a que $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$. De façon analogue, on a que $\frac{CB}{BD} = \frac{CF}{FD}$. Par hypothèse, $AB = CB$, donc $\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FD}$, ce qui implique que $EF \parallel AC$. Ainsi $\triangle DEF$ et $\triangle DAC$ coïncident, ce qui signifie, en vertu de (1), que BD rencontre AC en son point milieu N. Comme $\triangle ABC$ est isocèle, $AC \perp BD$. Comme $\triangle NAD$ et $\triangle NCD$ sont des triangles rectangles ayant les deux côtés de l'angle droit de mêmes longueurs, il sont congruent et il s'ensuit que $AD = CD$.

PROBLÈME 5

Supposons que les nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ satisfont aux conditions suivantes

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0,$$
$$a_1 + a_2 \leq 100 \text{ and}$$
$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leq 100.$$

Déterminer la valeur maximale possible de $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$, et trouver toutes les suites possibles $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ pour lesquelles cette valeur maximale est atteinte.

SOLUTION 5

Comme $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 200$, alors

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 &\leq 200 \\
&\leq (100 - a_2)^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \\
&= 100^2 - 200a_2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \\
&\leq 100^2 - (a_1, a_2, \ldots, a_{100}) + 2a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 \\
&= 100^2 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + (a_4^2 - a_4a_2) + \cdots \\
&\quad + (a_{100}^2 - a_{100}a_2) \\
&= 100^2 + (a_2 - a_1)a_2 + (a_3 - a_2)a_3 + (a_4 - a_2)a_4 + \cdots \\
&\quad + (a_{100} - a_2)a_{100}
\end{aligned}$$

Puisque $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$, aucun des termes de la forme $(a_i - a_j)a_i$ n'est positif. Donc $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 \leq 10,000$ avec égalité si et seulement si

$$\begin{aligned}
a_1 &= 100 - a_2, \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} &= 200, \text{ et} \\
(a_2 - a_1)a_2 &= 0 \\
(a_3 - a_2)a_3 &= 0 \\
(a_4 - a_2)a_4 &= 0 \\
&\vdots \\
(a_{100} - a_2)a_{100} &= 0
\end{aligned}$$

Comme $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$, ces équations sont vérifiées si et seulement si, pour un certain $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_1 = a_2 = \cdots = a_i \text{ et} \\
a_{i+1} = \cdots = a_{100} = 0
\end{aligned}$$

Si $i = 1$, une solution optimale est $100, 0, 0, \ldots, 0$. Si $i \geq 2$, alors l'équation $a_1 + a_2 = 100$ nous donne que $i = 4$ et on obtient une deuxième solution optimale : $50, 50, 50, 50, 0, 0, \ldots, 0$.