2001
SOLUTIONS

Plusieurs solutions sont la publication de versions de solutions soumises par les participants dont le nom apparaît en *italiques*..

1. *(Daniel Brox)*
   Soit J l'âge de Julie, et soit G l'âge de Gaston. L'équation quadratique de Julie est

$$a(x-J)(x-G) = ax^2 - a(J+G)x + aJG.$$

pour un certain nombre a. Il est donné que le coefficient a est un entier. La somme des coefficients est

$$a - a(J+G) + aJG = a(J-1)(G-1).$$

Puisque c'est un nombre premier, le produit de deux des trois entiers $a, J-1, R-1$ est 1. Il est donné que $J > G > 0$, donc il faut que $a = 1$, $G = 2$, $J-1$ soit premier, et la quadratique est

$$(x-J)(x-2).$$

Nous savons que cette quadratique prend la valeur $-55 = -5 \cdot 11$ pour un certain entier positif x. Puisque $J > 2$, le premier facteur, $(x-J)$, doit être le négatif. Nous avons quatre cas:
$x - J = -55$ et $x - 2 = 1$, ce qui implique $x = 3$, $J = 58$.
$x - J = -11$ et $x - 2 = 5$, ce qui implique $x = 7$, $J = 18$.
$x - J = -5$ et $x - 2 = 11$, ce qui implique $x = 13$, $J = 18$.
$x - J = -1$ et $x - 2 = 53$, ce qui implique $x = 57$, $J = 58$.

Puisque $J-1$ est premier, le premier et dernier cas sont à rejeter, donc $J = 18$ et $G = 2$.

2. *(Lino Demasi)*
   Après dix lancers de pièce, le pion termine sur la case numérotée $2k-10$, où k est le nombre de piles obtenus. Parmi les $2^{10} = 1024$ résultats possibles des dix lancers de pièce, il y a exactement $\binom{10}{k}$ façons d'obtenir exactement k piles, donc la possibilité de terminer sur la case numérotée $2k-10$ est de $\binom{10}{k}/1024$.

La probabilité d'être sur une case rouge est de $c/1024$ où c est la somme d'une sélection de nombres de la liste

$$\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \ldots, \binom{10}{10} = 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. \qquad (1)$$

Il est donné que pour quelques entiers a, b satisfaisant $a + b = 2001$,

$$a/b = c/1024.$$

Si nous supposons que (comme la plupart des participants l'ont fait) que a et b sont relativement premiers, alors la solutions est la suivante. Puisque $0 \le a/b \le 1$ et $a + b = 2001$, nous avons $1001 \le b \le 2001$. Aussi b divise 1024, donc nous avons $b = 1024$. Ainsi $a = c = 2001 - 1024 = 977$. Il n'y a qu'une seule façon de choisir les termes de (**??**) de telle sorte que la somme soit 977.

$$977 = 10 + 10 + 45 + 120 + 120 + 210 + 210 + 252. \qquad (2)$$

(Ceci est facile à vérifier, puisque la somme des termes restant dans (**??**) doit être de $1024 - 977 = 47$, et $47 = 45 + 1 + 1$ est la seule possibilité pour ceci.)

Pour maximiser n, il faut colorier la bande de la façon suivante. Les cases impaires sont rouges si le nombre est positif, et blanches si le nombre est négatif. Puisque $252 = \binom{10}{5}$ est dans la somme, la case numérotée $2 \cdot 5 - 10 = 0$ est rouge. Pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, si $\binom{10}{k}$ apparaît deux fois dans la somme (**??**), alors $2k - 10$ et $10 - 2k$ sont rouges. si $\binom{10}{k}$ n'apparaît pas dans la somme, alors $2k - 10$ et $10 - 2k$ sont blancs. Si $\binom{10}{k}$ apparaît une fois dans la somme, alors $10 - 2k$ est rouge et $2k - 10$ est blanc. Ainsi, on obtient la valeur maximale de n quand les cases rouges sont celles numérotées $\{1, 3, 5, 7, 9, -8, 8, -4, 4, -2, 2, 0, 6\}$ ce qui donne $n = 31$.

(Alternativement) Si on ne suppose pas que a et b sont relativement premiers, alors il y a plusieurs autres possibilités à considérer. Le plus grand commun diviseur de a et b divise $a + b = 2001$, donc $\gcd(a, b)$ est l'un de

$$1,\ 3,\ 23,\ 29,\ 3 \cdot 23,\ 3 \cdot 29,\ 23 \cdot 29,\ 3 \cdot 23 \cdot 29.$$

Puisque $a/b = c/1024$, la division b par $\gcd(a, b)$ donne comme résultat une puissance de 2. Ainsi la décomposition en facteurs premiers de b est l'une des suivantes, pour un certain entier k.

$$2^k,\ 3 \cdot 2^k,\ 23 \cdot 2^k,\ 29 \cdot 2^k,\ 69 \cdot 2^k,\ 87 \cdot 2^k,\ 667 \cdot 2^k,\ 2001.$$

de nouveau on a $1001 \leq b \leq 2001$, donc b doit être l'un des nombres suivants.

$$1024,\ 3 \cdot 512 = 1536,\ 23 \cdot 64 = 1472,\ 29 \cdot 64 = 1856,\ 69 \cdot 16 = 1104,\ 87 \cdot 16 = 1392,\ 667 \cdot 2 = 1334,\ 2001.$$

Ainsi $a/b = (2001 - b)/b$ est l'une des fractions suivantes.

$$\frac{977}{1024},\ \frac{465}{1536},\ \frac{529}{1472},\ \frac{145}{1856},\ \frac{897}{1104},\ \frac{609}{1392},\ \frac{667}{1334},\ \frac{0}{2001}.$$

Ainsi $c = 1024a/b$ est l'un des entiers suivants.

$$977,\ 310,\ 368,\ 80,\ 832,\ 448,\ 512,\ 0.$$

Après vérification (plutôt fastidieuse), on trouve que seules les sommes suivantes dont les termes sont ceux de (**??**) peuvent être une valeur possible de c.

$$\begin{aligned}
977 &= 10 + 10 + 45 + 120 + 120 + 210 + 210 + 252 \\
310 &= 10 + 45 + 45 + 210 \\
512 &= 10 + 10 + 120 + 120 + 252 \\
512 &= 1 + 1 + 45 + 45 + 210 + 210 \\
0 &= 0.
\end{aligned}$$

De nouveau, seuls les termes apparaissant une seule fois dans une somme peuvent affecter la valeur maximale de n. On fait le tableau suivant.

c	Termes apparaissant une fois dans la somme	Cases rouges correspondantes
977	$\{45, 252\}$	$\{6, 0\}$
310	$\{10, 210\}$	$\{8, 2\}$
512	$\{252\}$	$\{0\}$
512	$\emptyset$	$\emptyset$
0	$\emptyset$	$\emptyset$

Il est évident que l'on obtient la valeur maximale possible de n quand $c = 310 = \binom{10}{2} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9}$, les cases rouges sont $\{1, 3, 5, 7, 9, -6, 6, 2, 8\}$, la probabilité de terminer sur une case rouge est $a/b = 465/1536 = 310/1024 = 155/512$, et $n = 35$.

3. *Solution 1: (Daniel Brox)*
   Soit O le centre du cercle circonscrit au $\triangle ABC$. Soit R le point d'intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ et du cercle circonscrit. Nous avons

   $$\angle BOR = 2\angle BAR = 2\angle CAR = \angle COR$$

   Ainsi $BR = CR$ et R est sur la médiatrice de BC. Ainsi $R = P$ et $ABCP$ sont cocycliques. Les points X, Y, M sont les pieds des trois perpendiculaires issues de P sur les côtés du $\triangle ABC$. Ainsi par la loi de Simon, X, Y, M sont colinéaires. Ainsi nous avons $M = Z$ et $BZ/ZC = BM/MC = 1$.

   Note: XYZ est appelée une *Simson line*, *Wallace line* or *pedal line* pour $\triangle ABC$. Pour prouver la loi de Simon, nous remarquons que $BMPX$ sont cocycliques, comme le sont $AYPX$, ainsi

   $$\angle BXM = \angle BPM = 90 - \angle PBC = 90 - \angle PAC = \angle APY = \angle AXY$$

   Solution 2: (Kenneth Ho)
   Puisque $\angle PAX = \angle PAY$ et $\angle PXA = \angle PYA = 90$, les triangles $\triangle PAX$ et $\triangle PAY$ sont congruents, donc $AX = AY$ et $PX = PY$. Comme P est sur la médiatrice de BC, nous avons $PC = PB$. Ainsi $\triangle PYC$ et $\triangle PXB$ sont des triangles rectangles congruents, ce qui implique $CY = BX$. Puisque X, Y et Z sont colinéaires, nous avons par le Théorème de Menelaus

   $$\frac{AY}{YC}\frac{CZ}{ZB}\frac{BX}{XA} = -1.$$

   En appliquant $AX = AY$ et $CY = BX$, ceci équivaut à $BZ/ZC = 1$.

4. Nous verrons que la seule solution est $n = 2$. D'abord nous montrons que si $n \neq 2$, alors le tableau $T_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ n-1 \end{bmatrix}$ ne peut pas être transformé en un tableau contenant deux zéros. Pour $n = 1$, c'est très facile à voir. Supposons que $n \geq 3$. Pour n'importe quel tableau $T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, soit $d(T)$ la quantité $b - a \pmod{n-1}$. Nous montrerons qu'aucun des deux déplacements autorisés ne peuvent changer la valeur de $d(T)$. Si nous soustrayons n aux deux éléments de T, alors $b - a$ ne change pas. Si nous multiplions la première rangée par n, alors l'élément a change en na, avec une différence de $(n-1)a$, ce qui est congruent à $0 \pmod{n-1}$. De façon similaire, la multiplication de la deuxième rangée par n ne change pas $d(T)$. Puisque $d(T_0) = (n-1) - 1 \equiv -1 \pmod{n-1}$, nous ne pouvons jamais obtenir le tableau avec deux zéros en commençant par T_0, parce que $0 - 0$ n'est pas congruent à -1 modulo $n - 1$.

   Pour $n = 2$, et n'importe quel tableau d'entiers positifs, le procédé suivant résultera toujours en un tableau de zéros. Nous commencerons par changer la première colonne de zéros de la façon suivante.

   Nous soustrayons 2 à toutes les entrées de la première colonne et répétons cette opération jusqu'à ce qu'au moins une des entrées soit 1 ou 2. Maintenant nous répétons la série de trois pas suivante:

(a) multiplier par 2 toutes les rangées ayant 1 dans la première colonne

(b) maintenant multiplier par 2 chaque rangée ayant 2 dans la première colonne (il y a au moins une telle rangée)

(c) soustraire 2 de toutes les entrées dans la première colonne.

Chaque répétition des trois pas diminue la somme de ces entrées dans la première colonne qui sont plus grandes que 2. Ainsi la première colonne, à la fin, consiste uniquement de uns et de deux alors nous appliquons (a) et (c) une fois encore pour obtenir une colonne de zéros. Nous répétons alors la méthode précédente à chaque colonne du tableau. La méthode n'affecte aucune colonne qui a déjà été mise à zéro, donc nous obtenons à la fin un tableau dont toutes les entrées sont égales à zéro.

5. *(Daniel Brox)*
Soit $\angle P_1P_3P_2 = 2\alpha$. Comme $\triangle P_1P_2P_3$ est isocèle, nous avons

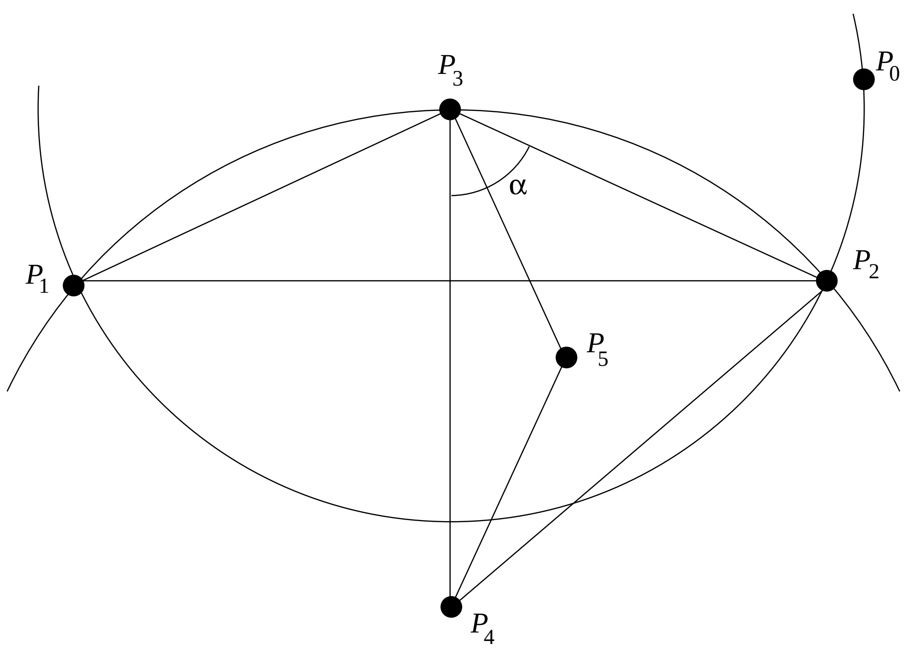
$$t = P_1P_2 = 2\sin\alpha.$$

La droite P_3P_4 est la médiatrice de P_1P_2. Puisque $\triangle P_2P_3P_4$ est isocèle, nous calculons sa longueur,

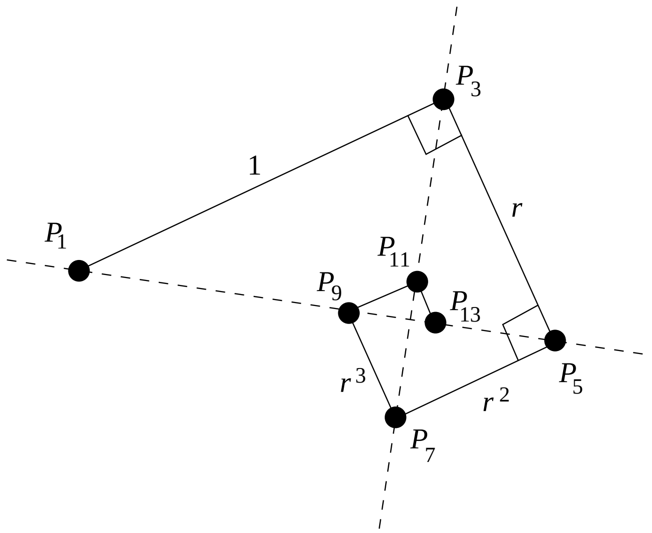
$$P_3P_4 = \frac{P_2P_3/2}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Comme P_5 est le cercle circonscrit de $\triangle P_2P_3P_4$, nous avons $\angle P_3P_5P_4 = 2\angle P_3P_2P_4 = 2\angle P_2P_3P_4 = 2\alpha$. Le triangle isocèle $\triangle P_3P_4P_5$ est donc similaire au $\triangle P_1P_2P_3$. Comme $P_3P_4 \perp P_1P_2$, nous avons $\angle P_1P_3P_5 = 90$. De plus, le rapport $P_3P_5 : P_1P_3$ est égal à r où

$$r = \frac{P_3P_4}{P_1P_2} = \frac{1}{(2\sin\alpha)(2\cos\alpha)} = \frac{1}{2\sin(2\alpha)}.$$



De la même façon, nous voyons que chaque $\angle P_iP_{i+2}P_{i+4}$ est un angle droit avec $P_{i+2}P_{i+4} : P_iP_{i+2} = r$. Ainsi les points $P_1, P_3, P_5, \ldots$ sont sur une spirale logarithmique de rapport r et de période quatre comme cela va être prouvé. Il s'en suit que $P_1, P_5, P_9, \ldots$ sont colinéaires, prouvant partie (a).



Par l'auto-similitude de la spirale, nous avons $P_1P_{1001} = r^{500}P_{1001}P_{2001}$, donc

$$\sqrt[500]{x/y} = 1/r = 2\sin(2\alpha).$$

Ceci est un entier quand $\sin(2\alpha) \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}$. Puisque $0 < \alpha < 90$, ceci équivaut à $\alpha \in \{15, 45, 75\}$. Ainsi $\sqrt[500]{x/y}$ est un entier exactement quand t appartient à l'ensemble $\{2\sin 15,\ 2\sin 45,\ 2\sin 75\}$. Ceci répond à la partie (b).

RAPPORT DES CORRECTEURS

Quatre-vingt-quatre des quatre-vingt-cinq étudiants éligibles ont soumis une copie d'examen. Toutes les copies contenaient des solutions proposées à quelques-unes des questions de l'examen ou à toutes. Pour chaque solution correcte et bien présentée sept points étaient attribués jusqu'à un total maximal de 35. La moyenne a été de 10.8/35. Les trois meilleures notes ont été, 28, 27, et 22, il a donc fallu une attention très rigoureuse pour différencier les deux meilleures copies.

Deux correcteurs ont corrigé indépendamment chaque solution. Si les deux notes étaient différentes, alors la solution était reconsidérée jusqu'à résolution de la différence. Ensuite, les vingt meilleures copies ont été soigneusement recorrigées par le président pour vérifier qu'il n'y avait pas de fautes.

La distribution des notes et la moyenne pour chaque question apparaît dans le tableau suivant. Par exemple, 13.1% des étudiants ont reçu 3 points pour la question #1.

Marks	#1	#2	#3	#4	#5
0	10.7	11.9	45.2	60.7	90.5
1	8.3	8.3	26.2	10.7	3.6
2	8.3	6.0	4.8	8.3	1.2
3	13.1	9.5	3.6	9.5	1.2
4	10.7	17.9	0.0	4.8	1.2
5	9.5	32.1	3.6	2.4	2.4
6	20.2	13.1	0.0	1.2	0.0
7	19.0	1.2	16.7	2.4	0.0
Ave. Mark	4.05	3.64	1.79	1.09	.26

PROBLÈME 1 Quatre-vingt-quinze pour cent des étudiants ont répondu correctement, bien qu'un nombre surprenant y soit arrivé par essai et erreur ou en devinant et en vérifiant la solution. Beaucoup ont supposé sans le prouver que le coefficient directeur est un, ce qui impliquait une pénalité de deux points. Une autre erreur commune était de ne pas considérer toutes les quatres possibilités pour la paire $(x - R), (x - 2)$.

PROBLÈME 2 Il y avait une erreur dans la question 2. Les auteurs originaux voulaient que les entiers a, b soit relativement premiers. Ceci était explicite dans un premier tirage, mais a été perdu d'une certaine façon dans l'expression ambigüe "de la forme a/b." Sans cette hypothèse, le problème est beaucoup plus fastidieux à résoudre. Remarquablement, un étudiant (Lino Demasi) a considéré plus de valeurs possibles pour $\gcd(a, b)$ (mais pas toutes) et a obtenu la réponse correcte $n = 35$. Tous les autres étudiants ont supposé implicitement (et dans deux cas, explicitement) que $\gcd(a, b) = 1$. Des solutions aux deux problèmes sont présentées dans cette publication.

PROBLÈME 3 La plupart des étudiants a complétement résolu ou a été déconcertée par ce problème de géométrie fondamentale. Il y avait au moins quatre types de solutions: une trigonométrique, une usant la géometrie fondamentale, et deux basées sur des théorèmes classiques du triangle. Les deux premières avaient tendance a être longues et maladroites, et les deux autres sont présentées ici. Certains participants se sont plaints d'angles inexacts apparaissant sur le diagramme joint à la question. L'inexactitude était voulue, puisque sinon l'observation clé $M = Z$ aurait été trop évidente. Malheureusement, cela a amené des étudiants à douter de leurs propres démonstrations que $BZ : ZC = 1$; puisque le rapport semble plus proche de 2 sur le diagramme déroutant!

PROBLÈME 4 Environ 60% des étudiants n'ont pas répondu à ce problème. Plusieurs solutions consistaient seulement de la preuve que $n = 1$ n'est pas possible. Environ 25% ont décrit une méthode qui marche quand $n = 2$. Et en fait la méthode pour $n = 2$ semble unique. Environ 10% ont prouvé qu'aucune autre valeur de n n'était possible, et toutes les démonstrations incluaient explicitement ou implicitement le fait de considérer les restes modulo $n - 1$.

PROBLÈME 5 Ce problème s'est avéré très difficile. Seulement deux étudiants ont complètement répondu à la partie (a), et personne n'a répondu correctement à la partie (b). Parmi les élèves qui ont reçu plus de 0 point, seulement deux n'étaient pas parmi les premiers 15. Cela suggère que la question a efficacement résolu le classement des participants les plus forts, ce qui, de façon discutable, est le but du Problème 5.