l'Olympiade mathématique du Canada 2002
Solutions

1. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires non-ordonnées d'éléments distincts de S soient tous différentes. Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$ possède cette propriété, mais pas le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ puisque les paires $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ ont la même somme, soit 5.

   Quel est le nombre maximal d'éléments que S peut contenir ?

   Prmière solution
   Le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5. Pour démontrer ce résultat, on constate d'abord que les sommes de chacune des paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ sont différentes. Maintenant, supposons qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \ldots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires d'éléments distincts de S soient tous différentes. Si tel est le cas, il doit y avoir $\left(\begin{array}{c} 6 \\ 2 \end{array}\right) = 15$ paires, formées à partir des éléments de S, variant de 1+2=3 à 8+9=17. Il en découle que chacune des sommes $3, \ldots, 17$ sont représentées. Puisque les sommes 3 et 17 sont représentées, les éléments $1, 2, 8, 9$ appartiennent forcément à S. Mais on ne peut pas admettre ces 4 éléments comme éléments puisque $1 + 9 = 2 + 8$. Nous avons, donc, une contradiction ce qui démontre bel et bien que le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5.

   Seconde solution

   Le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5. Pour démontrer ce résultat, on constate d'abord que les sommes de chacune des paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ sont différentes. Maintenant, supposons qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \ldots, 9\}$ tel que les sommes de chacune des paires d'éléments distincts de S soient tous différentes. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$, les éléments de S. Puisque $a_1 + a_6 \neq a_2 + a_5$, on peut déduire que $a_6 - a_5 \neq a_2 - a_1$. Pareillement, $a_6 - a_5 \neq a_4 - a_3$ et $a_4 - a_3 \neq a_2 - a_1$. Comme ces trois différences doivent être des entiers positifs différents, on doit avoir

   $$(a_6 - a_5) + (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geq 1 + 2 + 3 = 6\,.$$

   De façon semblable, $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$ et

   $$(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) \geq 1 + 2 = 3\,.$$

   De la somme des deux inégalités ci-dessus, nous obtenons

   $$a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 \geq 6 + 3 = 9\,,$$

   et donc $a_6 - a_1 \geq 9$. Mais ceci est impossible puisque les éléments de S sont des nombres compris entre 1 et 9. Nous avons, donc, une contradiction ce qui démontre bel et bien que le nombre maximal d'éléments que S peut contenir est 5.

2. Un entier positif n est dit **pratique** si tout entier plus petit ou égal à n peut s'écrire comme la somme de diviseurs distincts de n.

   Par exemple, les diviseurs de 6 sont **1**, **2**, **3** et **6** . Puisque

   $$1=\mathbf{1}, \quad 2=\mathbf{2}, \quad 3=\mathbf{3}, \quad 4=\mathbf{1}+\mathbf{3}, \quad 5=\mathbf{2}+\mathbf{3}, \quad 6=\mathbf{6},$$

   on voit que 6 est pratique.

   Démontrer que le produit de deux nombres pratiques est également pratique.

   Solution

   Supposons que p et q soient des nombres pratiques. Pour un nombre entier positif $k \leq pq$, on peut écrire

   $$k = aq + b \text{ tel que } 0 \leq a \leq p,\ 0 \leq b < q.$$

   Puisque p et q sont des nombres pratiques, on peut également écrire

   $$a = c_1 + \ldots + c_m, \quad b = d_1 + \ldots + d_n$$

   où les c_i sont des diviseurs distincts de p et les d_j sont des diviseurs distincts de q. Ainsi, nous avons

   $$\begin{aligned} k &= (c_1 + \ldots + c_m)q + (d_1 + \ldots + d_n) \\ &= c_1 q + \ldots + c_m q + d_1 + \ldots + d_n. \end{aligned}$$

   Chacun des nombres $c_i q$; $i = 1, \ldots m$, et d_j ; $j = 1, \ldots n$ sont des diviseurs de pq. Puisque $d_j < q \leq c_i q$ pout tout i, j, les nombres $c_i q$ and d_j sont distincts, et il en découle que pq est un nombre pratique.

3. Démontrer que pour tous nombres réels positifs a, b et c,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

et déterminer les conditions pour lesquelles on a égalité.

Première solution.

Remarquer d'abord que $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{(a^4 + b^4)}{2} + \frac{(b^4 + c^4)}{2} + \frac{(c^4 + a^4)}{2}$. En utilisant l'inégalité $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ à trois reprises, nous obtenons

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Le côté droit de cette dernière inégalité peut s'écrire comme

$$\frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b^2(c^2 + a^2)}{2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{2}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ à trois reprises, nous obtenons $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$. Enfin, le résultat est obtenu en divisant chacun des membres de cette dernière inégalité par le nombre positif abc.

Seconde solution.

Remarquer d'abord que l'inégalité est homogène, dans le sens que si $k > 0$ et qu'on remplace a, b, c par ka, kb, kc, on retrouve l'inégalité de départ. Donc, sans perte de généralité, nous pouvons poser $k = \frac{1}{abc} = 1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} &= abc\left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}\right) \\ &= a^4 + b^4 + c^4;\end{aligned}$$

et l'inégalité équivalente $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$, sous la contrainte $abc = 1$.

En vertu de l'inégalité

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 ,$$

on peut affirmer que $a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \dfrac{(a + b + c)^3}{27}$.

De plus, grâce à l'inégalité moyennes arithmétique-géométrique : $\dfrac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, il est vrai que $a + b + c \geq 3$.

Enfin, $a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c) \cdot \dfrac{(a + b + c)^3}{27} \geq (a + b + c)\dfrac{3^3}{27} = a + b + c$.

Troisième solution.

Cette démonstration est identique à la démonstration précédente, sauf que, plutôt que d'utiliser directement l'inégalité

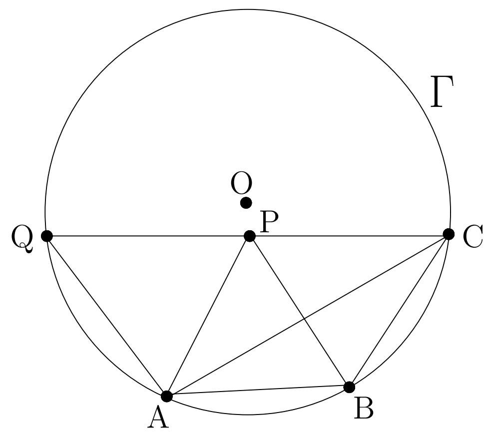
$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$$

dans la seconde démonstration, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz-Bunjakovsky à deux reprises de telle façon que

$$\begin{aligned}(a^4 + b^4 + c^4)(1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) &\geq (a + b + c)^2\end{aligned}$$

et $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{9} \geq \dfrac{(a + b + c)^4}{3^4}$.

4. Soit Γ un cercle de rayon r. Soient A et B des points distincts sur Γ avec $AB < \sqrt{3}r$. Supposons que le cercle de centre B et de rayon AB rencontre de nouveau Γ en C. Supposons que P soit le point à l'intérieur de Γ pour lequel le triangle ABP est équilatéral. Enfin, supposons que la droite CP rencontre de nouveau Γ au point Q. Démontrer que $PQ = r$.



Première solution.

Notons O le centre du cercle Γ, et r son rayon. Puisque $BP = BC$, on peut poser $\theta = \angle BPC = \angle BCP$. En vertu du fait que le quadrilatère $QABC$ est cyclique, nous avons $\angle BAQ = 180° - \theta$ et, ainsi, $\angle PAQ = 120° - \theta$.

De plus $\angle APQ = 180° - \angle APB - \angle BPC = 120° - \theta$, ce qui implique $PQ = AQ$ et $\angle AQP = 2\theta - 60°$.

De nouveau, en utilisant le fait que le quadrilatère $QABC$ est cyclique, $\angle ABC = 180° - \angle AQC = 240° - 2\theta$.

Remarquer maintenant que les triangles OAB and OCB sont congruents puisque $OA = OB = OC = r$ et $AB = BC$.

C'est alors qu'on obtient : $\angle ABO = \angle CBO = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 120° - \theta$.

Pour recapituler, nous avons montré que, pour les triangles AQP and AOB, $\angle PAQ = \angle BAO = \angle APQ = \angle ABO$. De plus, $AP = AB$, ce qui implique (i) $\triangle AQP \cong \triangle AOB$, et (ii) $PQ = OB = r$, soit le résultat demandé.

Seconde solution.

Notons O le centre du cercle Γ, et r son rayon. Puisque A, P et C sont tous des points sur un cercle centré en B, nous avons $60° = \angle ABP = 2\angle ACP$, et $\angle ACP = \angle ACQ = 30°$.

Aussi, puisque Q, A et C sont des points sur Γ, nous avons $\angle QOA = 2\angle QCA = 60°$.

Nous pouvons en déduire que $QA = r$ étant donné qu'une corde qui sous-tend un angle de $60°$ au centre du cercle a nécessairement une longueur égale au rayon du cercle.

D'autre part, $BP = BC$, ce qui implique $\angle BPC = \angle BCP = \angle ACB + 30°$.

Ainsi $\angle APQ = 180° - \angle APB - \angle BPC = 90° - \angle ACB$.

Puisque Q, A, B et C sont des points sur le cercle Γ, et que $AB = BC$, nous avons $\angle AQP = \angle AQC = \angle AQB + \angle BQC = 2\angle ACB$.

Enfin, (i) $\angle QAP = 180 - \angle AQP - \angle APQ = 90 - \angle ACB$; (ii) $\angle PAQ = \angle APQ$, et alors (iii) $PQ = AQ = r$.

5. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x^2+y^2)$$

pour tout x et y dans $\mathbb{N}$.

Première solution.

Il est facile de vérifier que toutes les fonctions constantes: $f(x) = c$; c appartenant à $\mathbb{N}$ font partie de l'ensemble des solutions. Nous montrons, par contre, qu'il n'existe pas d'autres solutions et que f doit être une fonction constante. Afin d'établir une contradiction, supposons qu'il existe des valeurs de x et de y telles que $f(x) < f(y)$, et que nous choisissons x, y parmi ces valeurs de telle façon que $f(y) - f(x) > 0$ soit minimale. Remarquer que, pour ce choix, nous avons

$$f(x) = \frac{xf(x) + yf(x)}{x+y} < \frac{xf(y) + yf(x)}{x+y} < \frac{xf(y) + yf(y)}{x+y} = f(y)\,,$$

et, par conséquence, $f(x) < f(x^2+y^2) < f(y)$ et $0 < f(x^2+y^2) - f(x) < f(y) - f(x)$, ce qui contredit le choix de x et de y et achève la démonstration.

Seconde solution.

Il est facile de vérifier que toutes les fonctions constantes: $f(x) = c$; c appartenant à $\mathbb{N}$ font partie de l'ensemble des solutions. Nous montrons, par contre, qu'il n'existe pas d'autres solutions et que f doit être une fonction constante. Définissons $g(x) = f(x) - f(0)$. Nous avons alors $g(0) = 0$, $g(x) \geq -f(0)$, et

$$xg(y) + yg(x) = (x+y)g(x^2+y^2)$$

pour tout x, y appartenant à $\mathbb{N}$. En posant $y = 0$, on obtient $g(x^2) = 0$ (en particulier, $g(1) = g(4) = 0$). En posant $x = y = 1$, on obtient $g(2) = 0$. De plus, si x, y et z sont des nombres appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$, alors

$$g(y) = -\frac{y}{x}g(x). \qquad (*)$$

Notamment, si $x = 4$ et $y = 3$, on déduit d'$(*)$ que $g(3) = g(4) = 0$. Pour un nombre pair quelconque $x = 2n > 4$, posons $y = n^2 - 1$. Remarquer que, pour un tel couple, $y > x$ et $x^2 + y^2 = (n^2+1)^2$. Pour un nombre impair quelconque $x = 2n+1 > 3$, posons $y = 2(n+1)n$. Remarquer que, pour un tel couple, $y > x$ et $x^2 + y^2 = ((n+1)^2 + n^2)^2$. Nous en déduisons que, pour tout $x > 4$, il existe un $y > x$ tel qu'$(*)$ est vérifiée. Maintenant, afin d'établir une contradiction, supposons qu'il existe $x_0 > 4$ tel que $g(x_0) > 0$. Mais, s'il existe un tel x_0, nous pourrait forcément construire une suite $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ de telle sorte que $g(x_{i+1}) = -\dfrac{x_{i+1}}{x_i}\, g(x_i)$. Pour cette suite, on aurait $|g(x_{i+1})| > |g(x_i)|$ et les signes de $g(x_i)$ alterneraient. Puisque la fonction g prend des valeurs dans $\mathbb{N}$, on aurait aussi que $|g(x_{i+1}| \geq |g(x_i)| + 1$. Mais, on aurait également $g(x_i) < -f(0)$ pour i suffisamment grand, ce qui n'est pas possible et ce qui achève cette démonstration.

Troisième solution.
Posons W l'ensemble d'entiers positifs ou nul et supposons que la fonction $f : W \to W$ vérifie la condition:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x^2+y^2). \qquad (*)$$

Nous montrons que f doit être une fonction constante.

Posons $f(0) = k$, et $S = \{x \mid f(x) = k\}$.

En substituant $y = 0$ dans l'expression $(*)$, on obtient $f(x^2) = k \quad \forall \ x > 0$, et il en découle que

$$x^2 \in S \quad \forall \ x > 0 \qquad (1)$$

Notamment, $1 \in S$.

Pour les choix de x et de y telles que $x^2 + y^2 = z^2$, nous avons $yf(x) + xf(y) = (x+y)f(z^2) = (x+y)k$. Ainsi,

$$x \in S \quad \text{ssi} \quad y \in S. \qquad (2)$$

lorsque $x^2 + y^2$ est un carré parfait.

Montrons maintenant que $2^l \in S$ pour tout entier $l \geq 0$. Supposons, afin d'établir une contradiction, que n soit le plus petit entier positif ou nul tel que $f(2^n) \neq k$. De (l), n doit être impair et $\dfrac{n-1}{2}$ doit être entier. Mais $\dfrac{n-1}{2} < n$ et, donc, $f(2^{\frac{n-1}{2}}) = k$. En posant $x = y = 2^{\frac{n-1}{2}}$ dans l'expression $(*)$, on obtient $f(2^n) = k$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, $2^l \in S$ pour tout entier $l \geq 0$.

Dans la suite, nous définissons, pour chaque entier $n \geq 2$, $p(n)$ comme le *plus grand nombre premier* tel que $p(n) \mid n$.

Proposition : Pour tout entier $n > 1$ qui n'est pas une puissance de 2, il existe une suite d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qui possède les propriétés suivantes:

a) $x_1 = n$.
b) $x_i^2 + x_{i+1}^2$ est un carré parfait pour chaque $i = 1, 2, 3, \ldots, r-1$.
c) $p(x_1) \geq p(x_2) \geq \ldots \geq p(x_r) = 2$.

Démonstration : Puisque n n'est pas une puissance de 2, $p(n) = p(x_1) \geq 3$. De plus, on peut poser $p(x_1) = 2m+1$, et écrire $n = x_1 = b(2m+1)^a$, où $a \geq 1$ et $p(b) < 2m+1$.

Premier cas : $a = 1$. Puisque $(2m+1, 2m^2+2m, 2m^2+2m+1)$ est un triplet de la forme (u, v, w) avec $u^2 + v^2 = w^2$, si $x_2 = b(2m^2+2m)$, alors $x_1^2 + x_2^2 = b^2(2m^2+2m+1)^2$ est un carré parfait. De plus, $x_2 = 2bm(m+1)$, et alors $p(x_2) < 2m+1 = p(x_1)$.

Second cas : $a > 1$. Si $n = x_1 = (2m+1)^a \cdot b$, posons $x_2 = (2m+1)^{a-1} \cdot b \cdot (2m^2+2m)$, $x_3 = (2m+1)^{a-2} \cdot b \cdot (2m^2+2m)^2$, ..., $x_{a+1} = (2m+1)^0 \cdot b \cdot (2m^2+2m)^a = b \cdot 2^a m^a (m+1)^a$. Remarquer que, pour $1 \leq i \leq a$, $x_i^2 + x_{i+1}^2$ est un carré parfait, et $p(x_{a+1}) < 2m+1 = p(x_1)$.

Si x_{a+1} n'est pas une puissance de 2, on prolonge la suite x_i comme ci-dessous en continuant jusqu'à ce qu'on obtienne $p(x_r) = 2$ pour un entier r.

En vertu de l'expression (2), $x_i \in S$ ssi $x_{i+1} \in S$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, r-1$. Donc, $n = x_1 \in S$ ssi $x_r \in S$. Mais x_r est une puissance de 2 puisque $p(x_r) = 2$, et nous avons montré précédemment que les puissances de 2 sont éléments de S. On en conclut que $n \in S$, ce qui complète la démonstration de la proposition.

En résumé, nous avons démontré que chaque entier $n \geq 1$ est élément de S, et qu'ainsi $f(n) = k = f(0)$, pour tout $n \geq 1$; c'est-à-dire que la fonction f doit être constante. Q.E.D.