Solution de l'Olympiade Mathématique du Canada 2004

1. Déterminer tous les triplets ordonnés de nombres réels (x, y, z), satisfaisant le système d'équations qui suit:

$$\begin{cases} xy &= z - x - y \\ xz &= y - x - z \\ yz &= x - y - z \end{cases}$$

Solution 1

Par soustraction de la deuxième équation de la première nous avons $xy - xz = 2z - 2y$. Mettant $y - z$ en évidence et réarrangeant les termes, nous obtenons

$$(x + 2)(y - z) = 0,$$

d'où il découle que soit $x = -2$, soit $z = y$.

Si $x = -2$, la première équation devient $-2y = z + 2 - y$, *i.e.* $y + z = -2$. Substituant $x = -2$ et $y + z = -2$ dans la troisième équation, il en suit que $yz = -2 - (-2) = 0$. Ainsi $y = 0$ ou $z = 0$, donnant les seules solutions $(-2, 0, -2)$ et $(-2, -2, 0)$.

Si $z = y$, la première équation devient $xy = -x$, *i.e.* $x(y + 1) = 0$. Si $x = 0$ (et $z = y$), la troisième équation devient $y^2 = -2y$ donnant $y = 0$ ou $y = -2$, et donc les deux solutions $(0, 0, 0)$ et $(0, -2, -2)$. Si on a plutôt $y = -1$ (et $z = y$), la troisième équation devient $x = -1$, donnant la solution $(-1, -1, -1)$.

En résumé, il y a 5 solutions: $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$ and $(-1, -1, -1)$

Solution 2

Additionnant x aux deux côtés de la première équation, nous avons

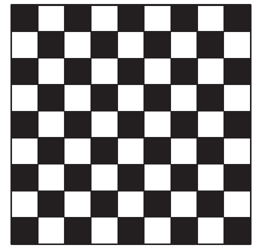
$$x(y + 1) = z - y = (z + 1) - (y + 1) \;\Rightarrow\; (x + 1)(y + 1) = z + 1.$$

Par manipulations similaires des deux autres équations et en posant $a = x+1$, $b = y+1$ et $c = z + 1$, nous pouvons réécrire le système comme suit:

$$\begin{cases} ab &= c \\ ac &= b \\ bc &= a \end{cases}$$

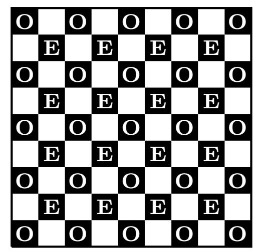
Si une de a, b, c est 0, il est clair qu'elles sont toutes 0. Ainsi, $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ est une solution. Supposons maintenant que a, b et c sont non nulles. Substituant $c = ab$ dans les deuxième et troisième équations, nous obtenons $a^2b = b$ et $b^2a = a$, respectivement. Ainsi, $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$, car a et b sont non nulles. D'où 4 autres solutions $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$. Par réécriture en x, y, z nous avons les mêmes 5 solutions qu'indiquées en Solution 1 ci-haut.

2. De combien de manières peut-on placer 8 tours non attaquantes sur un damier 9×9 (tel qu'illustré), de manière à ce que toutes ces 8 tours se retrouvent sur des carrés de la même couleur? [Deux tours sont dites attaquantes si elles se trouvent dans la même rangée ou dans le ême colonne du damier.]



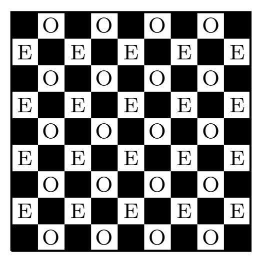
Solution 1

Comptons premièrement le nombre de manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés noirs; ensuite nous compterons le nombre de manières de placer ces tours sur des carrés blancs. Supposer que les rangées du damier ont été numérotées de 1 à 9, du haut vers le bas.



Remarquer premièrement qu'une tour placée sur un carré noir dans une rangée numérotée impaire ne peut pas attaquer une tour placée dans une rangée numérotée paire. Ceci partitionne effectivement les carrés noirs en un damier 5 par 5 et un autre 4 par 4, (voir les cases étiquetées O et E au schéma à droite); les tours peuvent être placées indépendamment sur ces deux damiers. Or il y a 5! manières de placer 5 tours non attaquantes sur les carrés O et 4! manières de placer 4 tours non attaquantes sur les carrés E.

Ceci donne 5!4! manières de placer 9 tours non attaquantes sur des carrés noirs. Le fait d'enlever une seule de ces tours donne une configuration du genre voulu. D'où il y a $9 \cdot 5!4!$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur les carrés noirs du damier.



Par un raisonnement similaire, on peut partitionner les carrés blancs du damier comme illustré par le schéma à droite. Les carrés blancs sont ainsi partitionnés dans deux damiers 5 par 4, E et O, où aucune tour O peut attaquer une quelconque tour E. Or, au plus 4 tours non attaquantes peuvent être placées sur un damier 5 par 4, d'où l'obligation d'en placer 8 au total force d'en placer 4 sur chacun des damiers 5 par 4. Puisqu'on peut placer 4 tours non attaquantes sur un damier 5 par 4 de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ manières, il y a $(5!)^2$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés blancs.

En résumé, il y a $9 \cdot 5!4! + (5!)^2 = (9 + 5)5!4! = 14 \cdot 5!4! = 40320$ manières de placer 8 tours non attaquantes sur des carrés de même couleur.

Solution 2

Considérons premièrement le cas des carrés noirs. Nous avons 8 tours et 9 rangées, d'où précisément une rangée sera sans tour.

Il y a deux cas possibles, que la rangée sans tour ait 5 carrés noirs ou 4 carrés noirs. Par permutation de rangées, cette rangée sans tour est soit dernière soit avant dernière. Dans chacun des cas, nous allons compter le nombre de manières de placer les tours, procédant par rangée.

Dans le premier cas, il y a 5 choix pour la rangée sans tour, que nous considérons maintenant être la dernière. On peut alors placer la tour en première rangée de 5 manières et la tour en deuxième rangée de 4 manières. Lorsqu'on va pour placer une tour en troisième rangée il suffit d'éviter la colonne contenant la tour de première rangée, d'où il y a 4 telles possibilités. Par un raisonnement similaire, on peut placer la tour en quatrième rangée de 3 manières, pour éviter la tour de deuxième rangée. Le nombre de possibilités dans le premier cas est ainsi 5 fois $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = (5!)^2$.

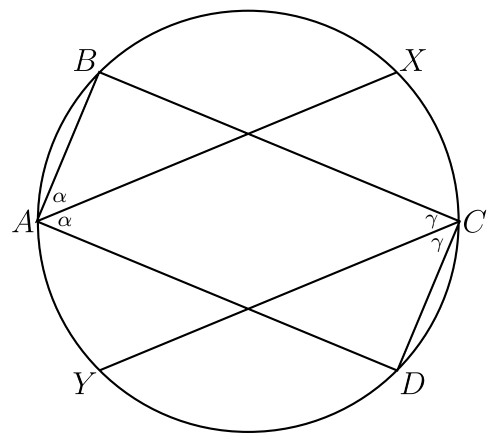
Dans le deuxième cas, il y a 4 choix pour la rangée sans tour, qu'on considère être l'avant dernière. Par une logique similaire à celle ci-haut, le nombre de manières de placer les tours est 4 fois $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4(5!4!)$.

Faisons de même pour les carrés blancs. Si la rangée sans tour a 4 cases blanches, il y a 5 fois $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$, donc $(5!)^2$ manières de placer les tours ainsi. Noter l'impossibilité qu'une rangée à 5 carrés blancs soit sans tour.

Enfin, le nombre total est

$$(5!)^2 + 4(5!4!) + (5!)^2 = (5 + 4 + 5)5!4! = 14(5!4!).$$

3. Soient A, B, C et D quatre points sur un cercle (s'y retrouvant en sens horaire), tels que $AB < AD$ et $BC > CD$. La bissectrice de l'angle BAD rencontre le cercle en X; la bissectrice de l'angle BCD rencontre le cercle en Y. Considérer l'hexagone formé par ces six points sur le cercle. Montrer que si quatre des six côtés de cet hexagone ont longueurs égales, alors BD est un diamètre du cercle.



Solution 1

On nous donne $AB < AD$. Puisque CY bissecte $\measuredangle BCD$ et que $BY = YD$, il en découle que Y se retrouve entre D et A sur le cercle, tel qu'indiqué au diagramme ci-haut; aussi, $DY > YA$ et $DY > AB$. Par un raisonnement similaire, X se retrouve entre B et C; aussi, $BX > XC$ et $BX > CD$. Donc si $ABXCDY$ a 4 côtés égaux, la seule possibilité est $YA = AB = XC = CD$.

Soient $\measuredangle BAX = \measuredangle DAX = \alpha$ et $\measuredangle BCY = \measuredangle DCY = \gamma$. Puisque $ABCD$ est cyclique, $\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$, ce qui implique que $\alpha + \gamma = 90°$. Or, le fait que $YA = AB = XC = CD$ implique que l'arc de Y à B (qui est soustendu par $\measuredangle YCB$) est égal à l'arc de X à D (qui est soustendu par $\measuredangle XAD$). Ainsi $\measuredangle YCB = \measuredangle XAD$, d'où $\alpha = \gamma = 45°$. Enfin, BD est soustendu par $\measuredangle BAD = 2\alpha = 90°$. D'où BD est un diamètre du cercle.

Solution 2

On nous donne $AB < AD$. Puisque CY bissecte $\measuredangle BCD$ et que $BY = YD$, il en découle que Y se retrouve entre D et A sur le cercle, tel qu'indiqué au diagramme ci-haut; aussi, $DY > YA$ et $DY > AB$. Par un raisonnement similaire, X se retrouve entre B et C; aussi, $BX > XC$ et $BX > CD$. Donc si $ABXCDY$ a 4 côtés égaux, la seule possibilité est $YA = AB = XC = CD$. Ceci implique que l'arc de Y à B est égal à l'arc de X à D, d'où $YB = XD$. Puisque $\measuredangle BAX = \measuredangle XAD$, que $BX = XD$ et que $\measuredangle DCY = \measuredangle YCB$, il en découle que $DY = YB$. Ainsi, $BXDY$ est un carré, d'où sa diagonale BD doit être un diamètre du cercle.

4. Soit p un entier premier impair. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

[Noter que $a \equiv b \pmod{m}$ signifie que $a - b$ est divisible par m.]

Solution

Puisque $p-1$ est pair, nous pouvons prendre les termes 2 par 2 comme suit (le premier terme avec le dernier, le deuxième avec le deuxième dernier ...):

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \Big(k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \Big).$$

Par application du binôme de Newton à $(p-k)^{2p-1}$, nous avons

$$(p-k)^{2p-1} = p^{2p-1} - \cdots - \binom{2p-1}{2} p^2 k^{2p-3} + \binom{2p-1}{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1},$$

où chaque terme au côté à droite est divisible par p^2 sauf les deux derniers. Ainsi

$$k^{2p-1} + (p-k)^{2p-1} \equiv k^{2p-1} + \binom{2p-1}{1} p k^{2p-2} - k^{2p-1} \equiv (2p-1) p k^{2p-2} \pmod{p^2}.$$

Or, pour $1 \leq k < p$, k n'est pas divisible par p, d'où $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, par le petit théorème de Fermat. Ainsi, $(2p-1)k^{2p-2} \equiv (2p-1)(1^2) \equiv -1 \pmod{p}$, qu'on peut écrire comme $(2p-1)k^{2p-2} = mp - 1$ pour un certain entier m. Alors

$$(2p-1)pk^{2p-2} = mp^2 - p \equiv -p \pmod{p^2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} &\equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (-p) \equiv \left(\frac{p-1}{2} \right) (-p) \pmod{p^2} \\ &\equiv \frac{p-p^2}{2} + p^2 \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

5. Soit T l'ensemble des diviseurs entiers positifs de 2004^{100}. Quel est la plus grande valeur possible pour le nombre d'éléments d'un sous-ensemble S de T, tel qu'aucun élément de S est un multiple entier d'un autre élément de S?

Solution

Dans ce qui suit, a, b et c dénoteront des entiers non négatifs.

La factorisation de 2004 en nombres premiers est $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, d'où

$$T = \left\{2^a 3^b 167^c \,\middle|\, 0 \leq a \leq 200,\ 0 \leq b, c \leq 100\right\}.$$

Posons

$$S = \left\{2^{200-b-c} 3^b 167^c \,\middle|\, 0 \leq b, c \leq 100\right\}.$$

Pour tout $0 \leq b, c \leq 100$, nous avons $0 \leq 200-b-c \leq 200$, d'où S est sous-ensemble de T. Puisqu'il y a 101 valeurs possibles pour b et 101 valeurs possibles pour c, S contient 101^2 éléments distincts. Nous allons montrer qu'aucun élément de S est multiple d'un autre élément de S et qu'aucun sous-ensemble de T ayant cette propriéténe peut contenir plus d'éléments.

Supposons que $2^{200-b-c}3^b167^c$ est un multiple entier de $2^{200-j-k}3^j167^k$. Alors

$$200 - b - c \geq 200 - j - k, \quad b \geq j, \quad c \geq k.$$

Or la première inégalité donne $b + c \leq j + k$, qui force $b = j$ et $c = k$ à cause de $b \geq j$ et $c \geq k$. Ainsi, aucun élément de S est un multiple entier d'un autre élément de S.

Soit maintenant U un sous-ensemble de T, comportant plus de 101^2 éléments. Puisqu'il n'y a que 101^2 paires (b, c) telles que $0 \leq b, c \leq 100$, il en découle par le principe du pigeonnier que U doit contenir deux éléments $u_1 = 2^{a_1}3^{b_1}167^{c_1}$ et $u_2 = 2^{a_2}3^{b_2}167^{c_2}$, tels que $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$. Ainsi, si $a_1 < a_2$, alors u_1 divise u_2; autrement, u_2 divise u_1. D'où l'ensemble U ne vérifie pas la condition énoncée.

Ainsi, le nombre maximal d'éléments dans un sous-ensemble T du genre indiqué est de $101^2 = 10201$.