Olympiade mathématique du Canada 2018

Solutions officielles

1. Des jetons sont positionnés dans le plan, pas nécessairement en des positions distinctes. On peut effectuer des mouvements de la façon suivante : on sélectionne deux jetons A et B et on les déplace au point milieu de A et B.

   On dit qu'un arrangement de n jetons est *compressible* s'il est possible d'en arriver à avoir les n jetons de l'arrangement en un même point après un nombre fini de mouvements. Démontrez qu'un arrangement de n jetons est compressible si et seulement si n est une puissance de 2.

   Solution. Étant donné un entier strictement positif n, considérons un arrangement de n jetons dans le plan où les jetons sont placés aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Soit G le centre de masse des n points. Lorsqu'on considère les points comme des vecteurs (avec un choix d'origine arbitraire),

$$\overrightarrow{G} = \frac{\overrightarrow{A}_1 + \overrightarrow{A}_2 + \cdots + \overrightarrow{A}_n}{n}.$$

   On remarque que les mouvements permis ne modifient pas G. Ainsi, si les jetons doivent tous se retrouver au même point, ce point doit être G.

   On commence par montrer que si $n = 2^k$ pour un entier positif k, alors les n jetons peuvent toujours être déplacés en un seul point. On utilise le principe d'induction sur k.

   Le résultat tient évidemment pour $n = 2^0 = 1$. Supposons qu'il tient pour $n = 2^k$ pour un entier positif k. Considérons un ensemble de 2^{k+1} jetons $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{k+1}}$. Soit M_i le point milieu de A_{2i-1} et A_{2i} pour $1 \le i \le 2^k$.

   On débute en déplaçant A_{2i-1} et A_{2i} au point M_i pour $1 \le i \le 2^k$. On a donc 2 jetons en M_i pour tout $1 \le i \le 2^k$. Si on prend un jeton sur chaque $M_1, M_2, \ldots, M_{2^k}$, l'hypothèse d'induction nous dit qu'on peut tous les déplacer en un point G. On peut ensuite faire de même pour le deuxième jeton aux positions $M_1, M_2, \ldots, M_{2^k}$. Ainsi, les 2^{k+1} jetons sont maintenant au point G, ce qui complète l'argument par induction.

Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

(Approche alternative à l'étape d'induction : étant donné des jetons aux points A_1, A_2, ..., $A_{2^{k+1}}$, on déplace les 2^k premiers jetons au point G_1 et les 2^k jetons suivants au point G_2. Ensuite, 2^k mouvements supplémentaires amèneront tous les jetons au point milieu de G_1 et G_2.)

Maintenant, supposons que n n'est pas une puissance de 2. Prenons n'importe quelle droite du plan et numérotons-là comme la droite réelle. (Pour la suite, lorsqu'on parlera d'un jeton positionné à une valeur réelle, on fera référence à cette droite.)

Au départ, plaçons $n-1$ jetons à 0 et un jeton à 1. Nous avons déjà observé que pour déplacer tous les jetons en un seul point, ce point doit être le centre de masse des jetons. Dans ce cas, le centre de masse est au point $\frac{1}{n}$.

On démontre maintenant un lemme.

Lemme. *La moyenne de deux rationnels dyadiques est un rationnel dyadique.* (Un *rationnel dyadique* est un nombre rationnel qui peut être écrit sous la forme $\frac{m}{2^a}$, où m est un entier et a un entier positif.)

Preuve. Soit deux rationnels dyadiques $\frac{m_1}{2^{a_1}}$ et $\frac{m_2}{2^{a_2}}$. Leur moyenne est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2^{a_1}} + \frac{m_2}{2^{a_2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{a_2} \cdot m_1 + 2^{a_1} \cdot m_2}{2^{a_1} \cdot 2^{a_2}}\right) = \frac{2^{a_2} \cdot m_1 + 2^{a_1} \cdot m_2}{2^{a_1+a_2+1}},$$

qui est un rationnel dyadique. ∎

Sur la droite réelle, un mouvement consiste à prendre un jeton en x et un jeton en y et les déplacer au point $\frac{x+y}{2}$, la moyenne de x et y. Au départ, tous les jetons sont placés sur des rationnels dyadiques (soit 0 ou 1), ce qui veut dire qu'après n'importe quel nombre de mouvements, ils seront encore placés sur des rationnels dyadiques.

Puisque n n'est pas une puissance de 2, $\frac{1}{n}$ n'est pas un rationnel dyadique. (S'il était possible d'exprimer $\frac{1}{n}$ sous la forme $\frac{m}{2^a}$, alors on aurait $2^a = mn$, ce qui est impossible à moins que m et n ne soient des puissances de 2.) Ceci implique qu'il est impossible qu'un jeton se retrouve au point $\frac{1}{n}$.

On peut donc déplacer tous les jetons en un seul point si et seulement si n est une puissance de 2.

2. Cinq points d'un cercle sont étiquetés par les lettres A, B, C, D et E dans le sens horaire. Supposons que $AE = DE$ et posons P l'intersection de AC et BD. Soit Q le point de la droite passant par A et B tel que A est entre B et Q et que $AQ = DP$. De la même façon, soit R le point de la droite passant par C et D tel que D est entre C et R et que $DR = AP$. Démontrez que PE est perpendiculaire à QR.

   Solution. On sait que $AQ = DP$ et $AP = DR$. De plus, $\angle QAP = 180° - \angle BAC = 180° - \angle BDC = \angle RDP$, ce qui implique que les triangles AQP et DPR sont congrus. Ainsi $PQ = PR$. Il en découle que P est sur la droite perpendiculaire à QR passant par le milieu de ce segment.

   On sait que $AP = DR$ et $AE = DE$. De plus, $\angle PAE = \angle CAE = 180° - \angle CDE = \angle RDE$, ce qui implique que les triangles PAE et RDE sont congrus. Ainsi $PE = RE$ et de la même façon $PE = QE$. Il en découle que E est sur la droite perpendiculaire à PQ passant par le milieu de ce segment.

   Puisque P et E sont tous deux sur la droite perpendiculaire à QR passant par son point milieu, on en déduit le résultat voulu.

3. Deux entiers positifs a et b sont *reliés par un nombre premier* si $a = pb$ ou $b = pa$ pour un nombre premier p. Déterminez tous les entiers positifs n tels que n a au moins 3 diviseurs et que tous ses diviseurs peuvent être arrangés sans répétition sur un cercle de façon à ce que deux diviseurs adjacents soient toujours reliés par un nombre premier.

   Notez que 1 et n sont toujours des diviseurs de n.

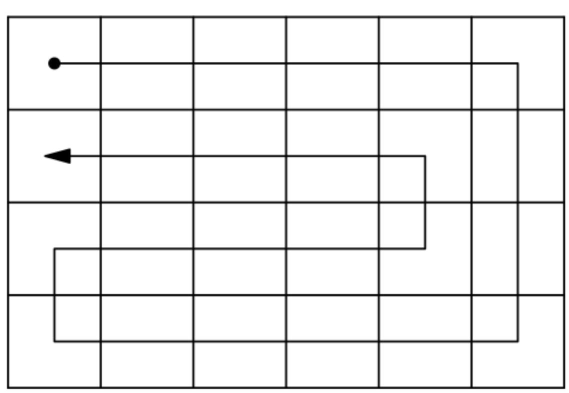
   Solution. On dit qu'un entier positif est *bon* s'il a la propriété demandée. Soit n un bon nombre et d_1, d_2, ..., d_k les diviseurs de n positionnés dans un cercle selon cet ordre. Alors pour tout $1 \leq i \leq k$, d_{i+1}/d_i (en prenant les indices modulo k) vaut soit p_i ou $1/p_i$ pour un certain premier p_i. En d'autres mots, $d_{i+1}/d_i = p_i^{\epsilon_i}$, où $\epsilon_i \in \{1, -1\}$. Ainsi

$$p_1^{\epsilon_1} p_2^{\epsilon_2} \cdots p_k^{\epsilon_k} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_3}{d_2} \cdots \frac{d_1}{d_k} = 1.$$

   Le produit $p_1^{\epsilon_1} p_2^{\epsilon_2} \cdots p_k^{\epsilon_k}$ vaut 1 puisque chaque facteur premier p doit être en paire avec un facteur $1/p$ et vice-versa. Donc k (le nombre de diviseurs de n) doit être pair. Ainsi, n ne peut pas être un carré parfait.

   De plus, n ne peut pas être une puissance d'un nombre premier (incluant simplement un premier) car 1 est toujours un diviseur de n et si n est une puissance d'un premier, alors le seul diviseur qui peut être relié à 1 est le nombre premier.

   Maintenant, posons $n = p^a q^b$ où p et q sont des premiers distincts et a est impair. On écrit les diviseurs de n dans une grille comme suit : dans la première ligne, on écrit les nombres 1, q, q^2, ..., q^b. Dans la rangée suivante, on écrit les nombres p, pq, pq^2, ..., pq^b et ainsi de suite. Le nombre de rangées dans la grille, $a + 1$, est pair. On remarque que si deux cases de la grille sont adjacentes (verticalement ou horizontalement), alors les nombres correspondants aux cases sont reliés par un nombre premier . On débute avec le nombre 1 dans le coin supérieur gauche. On se déplace ensuite vers la droite le long de la première ligne, vers le bas par la dernière colonne, à gauche sur la dernière ligne, et finalement on arpente les lignes horizontalement en passant par chaque case jusqu'à ce qu'on arrive à la case p. La figure suivante donne le chemin pour $a = 3$ et $b = 5$:



Il est ainsi possible d'écrire tous les diviseurs sur un cercle donc $n = p^a q^b$ est bon.

Maintenant, supposons que n est un bon nombre. Soit d_1, d_2, …, d_k les diviseurs de n placés dans le cercle dans cet ordre. Soit p un nombre premier qui ne divise pas n. On prétend que $n \cdot p^e$ est aussi un bon nombre. On arrange les diviseurs de $n \cdot p^e$ qui ne sont pas des diviseurs de n dans la grille comme suit :

$$\begin{matrix} d_1p & d_1p^2 & \cdots & d_1p^e \\ d_2p & d_2p^2 & \cdots & d_2p^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_kp & d_kp^2 & \cdots & d_kp^e \end{matrix}$$

On remarque que si deux cases de la grille sont adjacentes (verticalement ou horizontalement), alors les nombres correspondants aux cases sont reliés par un nombre premier. De plus, k (le nombre de rangées) est le nombre de diviseurs de n qui doit être pair (puisque n est bon). Ainsi, on peut utiliser le même chemin que plus tôt qui débute en d_1p et termine en d_2p. Puisque d_1 et d_2 sont des diviseurs adjacents sur le cercle associé à n, on peut insérer tous les diviseurs de la grille entre d_1 et d_2 pour obtenir un cercle pour $n \cdot p^e$.

Finalement, soit n un entier positif qui n'est ni un carré parfait ni une puissance d'un nombre premier. Supposons que la factorisation en nombres premiers de n est

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}.$$

Puisque n n'est pas une puissance d'un nombre premier, $t \geq 2$. De plus, puisque n n'est pas un carré parfait, au moins un exposant e_i est impair. Sans perte de généralité, supposons que e_1 est impair. Par ce qui a été fait plus haut, $p_1^{e_1} p_2^{e_2}$ est bon donc $p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3}$ est bon et ainsi de suite jusqu'à ce que $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ soit bon.

Ainsi, un entier positif n a la propriété voulue si et seulement s'il n'est ni un carré parfait, ni une puissance d'un nombre premier.

4. Déterminez tous les polynômes $p(x)$ à coefficients réels qui ont la propriété suivante : il existe un polynôme $q(x)$ à coefficients réels tel que

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)=p(n)q(n)$$

pour tous les entiers strictement positifs n.

Solution. La propriété tient si $p(x)$ est un polynôme constant puisque $q(x)=x$ satisfait la contrainte. Supposons maintenant que $p(x)$ n'est pas constant et a la propriété demandée. Soit d le degré de $p(x)$. Le polynôme $p(x)$ est donc de la forme

$$p(x)=cx^d+\cdots.$$

Par un lemme (on le prouvera plus tard), $\sum_{k=1}^n k^d$ est un polynôme de variable n de degré $d+1$, donc $p(1)+p(2)+\cdots+p(n)$ est un polynôme de variable n de degré $d+1$. Ainsi, $q(n)$ est un polynôme de degré 1. De plus, le coefficient en n^{d+1} de $\sum_{k=1}^n k^d$ est $\frac{1}{d+1}$, donc le coefficient en n de $q(n)$ est aussi $\frac{1}{d+1}$.
Soit $q(x)=\frac{1}{d+1}(x+r)$. On a que

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)=p(n)q(n)$$

et

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)+p(n+1)=p(n+1)q(n+1).$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient

$$p(n+1)=p(n+1)q(n+1)-p(n)q(n),$$

et donc

$$p(n)q(n)=p(n+1)[q(n+1)-1].$$

Puisque cette équation tient pour tous les entiers strictement positifs n, on en déduit que

$$p(x)q(x)=p(x+1)[q(x+1)-1]$$

pour tous les nombres réels x. On peut donc écrire

$$p(x)\cdot\frac{1}{d+1}(x+r)=p(x+1)\left[\frac{1}{d+1}(x+r+1)-1\right],$$

donc

$$(x+r)p(x)=(x+r-d)p(x+1). \qquad (*)$$

En posant $x=-r$ on obtient

$$(-d)p(-r+1)=0.$$

Ainsi, $-r+1$ est une racine de $p(x)$. Soit $p(x)=(x+r-1)p_1(x)$. Alors

$$(x+r)(x+r-1)p_1(x)=(x+r-d)(x+r)p_1(x+1),$$

donc

$$(x+r-1)p_1(x)=(x+r-d)p_1(x+1).$$

Si $d = 1$, alors $p_1(x)$ est une constante et les deux côtés sont égaux. On obtient alors $p(x) = c(x + r - 1)$.
Sinon, en posant $x = -r + 1$ on obtient

$$(1 - d)p_1(-r + 2) = 0.$$

Ainsi, $-r + 2$ est une racine de $p_1(x)$. Soit $p_1(x) = (x + r - 2)p_2(x)$. Alors

$$(x - r - 1)(x + r - 2)p_2(x) = (x + r - d)(x + r - 1)p_2(x + 1),$$

donc

$$(x + r - 2)p_2(x) = (x + r - d)p_2(x + 1).$$

Si $d = 2$, alors $p_2(x)$ est une constante et les deux côtés sont égaux. On obtient alors $p(x) = c(x + r - 1)(x + r - 2)$.
Sinon, on continue à effectuer des substitutions, ce qui nous donne

$$p(x) = c(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d).$$

À l'inverse, si $p(x)$ est de cette forme, alors

$$\begin{aligned}
p(x) &= c(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d) \\
&= \frac{c(d + 1)(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d)}{d + 1} \\
&= \frac{c[(x + r) - (x + r - d - 1)](x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d)}{d + 1} \\
&= \frac{c(x + r)(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d)}{d + 1} \\
&\quad - \frac{c(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d)(x + r - d - 1)}{d + 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi la somme $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n)$ est télescopique et ce qui reste est donné par

$$\begin{aligned}
p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n) &= \frac{c(n + r)(n + r - 1)(n + r - 2) \cdots (n + r - d)}{d + 1} \\
&\quad - \frac{c(r)(r - 1) \cdots (r - d + 1)(r - d)}{d + 1}.
\end{aligned}$$

On veut que cette expression soit de la forme

$$p(n)q(n) = c(n + r - 1)(n + r - 2) \cdots (n + r - d)q(n)$$

pour un certain polynôme $q(n)$. La seule façon que cette égalité tienne pour tous les entiers strictement positifs n est si le terme

$$\frac{c(r)(r - 1) \cdots (r - d + 1)(r - d)}{d + 1}$$

vaut 0. Ceci implique que r doit valoir soit 0, 1, 2, ..., d. Conséquemment, les polynômes recherchés sont de la forme

$$p(x) = c(x + r - 1)(x + r - 2) \cdots (x + r - d),$$

où $r \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$.

Lemme. *Pour un entier strictement positif d,*

$$\sum_{k=1}^{n} k^d$$

est un polynôme de variable n de degré $d+1$. De plus, le coefficient de n^{d+1} est $\frac{1}{d+1}$.

Preuve. On démontre le résultat à l'aide d'une induction généralisée. Pour $d = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

donc le résultat tient. Supposons que le résultat tient pour $d = 1$, 2, 3, ..., m pour un entier positif m.

Par le théorème du binôme,

$$(k+1)^{m+2} - k^{m+2} = (m+2)k^{m+1} + c_m k^m + c_{m-1}k^{m-1} + \cdots + c_1 k + c_0,$$

pour certains coefficients c_m, c_{m-1}, ..., c_1, c_0. En prenant la somme sur $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$(n+1)^{m+2} - 1 = (m+2)\sum_{k=1}^{n} k^{m+1} + c_m \sum_{k=1}^{n} k^m + \cdots + c_1 \sum_{k=1}^{n} k + c_0 n.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m+1} = \frac{(n+1)^{m+2} - c_m \sum_{k=1}^{n} k^m - \cdots - c_1 \sum_{k=1}^{n} k - c_0 n - 1}{m+2}.$$

Par l'hypothèse d'induction, les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^m$, ..., $\sum_{k=1}^{n} k$ sont tous des polynômes de variable n de degré inférieur à $m+2$. Ainsi, l'expression en question est un polynôme de la variable n de degré $m+2$ et le coefficient de n^{m+2} est $\frac{1}{m+2}$. Le résultat tient donc pour $d = m+1$, ce qui complète l'étape d'induction. ■

5. Soit k un entier pair strictement positif donné. Sarah débute en choisissant un entier N supérieur à 1 et le modifie ensuite de la façon suivante : chaque minute, elle choisit un diviseur premier p de N puis multiplie N par $p^k - p^{-1}$ pour produire la nouvelle valeur de N. Démontrez qu'il y a une infinité de nombres entiers pairs strictement positifs k tels que, peu importe les choix faits par Sarah, le nombre N sera à un certain point divisible par 2018.

Solution. Remarquons que 1009 est premier. Nous allons montrer que si $k = 1009^m - 1$ pour un certain entier strictement positif m, alors le nombre de Sarah devra à un certain point être divisible par 2018. Soit P le plus grand diviseur de N non divisible par un premier congruent à 1 modulo 1009. Supposons, par contradiction, que N ne sera jamais divisible par 2018. Nous allons montrer que P est décroissant à chaque minute. Supposons qu'à la t^{e} minute, Sarah choisit le diviseur premier p de N. On calcule premièrement que N est remplacé par $\frac{p^{k+1}-1}{p} \cdot N$ où

$$p^{k+1} - 1 = p^{1009^m} - 1 = (p-1)\left(p^{1009^m-1} + p^{1009^m-2} + \cdots + 1\right)$$

Supposons que q est un nombre premier qui divise le second facteur. Puisque q divise $p^{1009^m} - 1$, on déduit que $q \neq p$ et l'ordre de p modulo q doit diviser 1009^m et donc est divisible par 1009 ou est égal à 1. S'il vaut 1 alors $p \equiv 1 \pmod{q}$, ce qui implique que

$$0 \equiv p^{1009^m-1} + p^{1009^m-2} + \cdots + 1 \equiv 1009^m \pmod{q}$$

et donc $q = 1009$. Par contre, si $q = 1009$ alors $p \geq 1010$ et p doit être impair. Puisque $p - 1$ divise maintenant N, on en déduit que N est divisible par 2018 à la $(t+1)^{\text{e}}$ minute, ce qui est une contradiction.

Ainsi, l'ordre de p modulo q est divisible par 1009 et donc 1009 divise $q - 1$. Conséquemment, tous les diviseurs premiers du deuxième facteur sont congruents à 1 modulo 1009. Ceci implique que P est remplacé par un diviseur de $\frac{p-1}{p} \cdot P$ à la $(t+1)^{\text{e}}$ minute et décroît alors. Puisque $P \geq 1$ doit toujours tenir, P ne peut pas décroître pour toujours. Ainsi N doit à un certain point être divisible par 2018.

Remarque (aucun point). S'il est permis que k soit impair, alors en choisissant $k + 1$ divisible par $\phi(1009) = 1008$, on garantit que le nombre de Sarah sera divisible par 2018 dès qu'il sera pair, ce qui survient après la première ou la deuxième minute.

