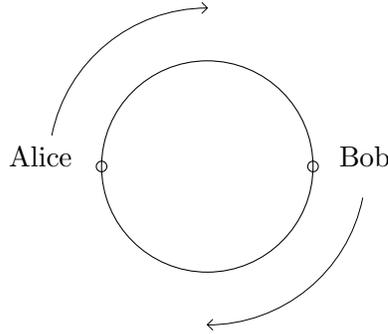


Comme chaque pente représente trois droites, chaque paire de pentes donne lieu à $3 \times 3 = 9$ points d'intersection. Il y a quatre pentes distinctes. Donc le nombre de paires de pentes distinctes est $4 \times 3/2 = 6$. Puisque trois droites n'ont aucun point de croisement commun, le nombre de points d'intersection est $9 \times 6 = 54$. \square

- B1 Alice et Bob courent autour d'une piste circulaire dans le sens des aiguilles d'une montre, chacun à une vitesse constante. Alice peut compléter un tour en t secondes tandis que Bob peut faire de même en 60 secondes. Les deux commencent en des des points opposés de la piste.



Quand ils se rencontrent pour la première fois, Alice a complété 30 tours. Trouver toutes les valeurs possibles pour t .

Solution: La réponse est $t = 59$ or $t = 61$.

Comme Alice a fait exactement 30 tours, Bob rencontre Alice au point où Alice a commencé à courir. Comme Bob a commencé à l'opposé d'Alice, Bob a couru $n + \frac{1}{2}$ tours pour un entier positif n . Puisque Alice et Bob se rencontrent pour la première fois après que Alice ait couru 30 tours, le nombre de tours qu'Alice et Bob ont couru ne peut différer de plus de 1. Ainsi, Bob a couru soit 29.5 ou 30.5 tours.

On remarque qu'Alice et Bob ont couru pendant la même période de temps. De plus, le nombre de secondes que chacun a couru est égal au nombre de tours que chacun a fait multiplié au nombre de secondes nécessaires pour compléter un tour.

Si Bob a couru 29.5 tours, alors $30t = 29.5 \times 60$. Alors, $t = 29.5 \times 2 = 59$.

Si Bob a couru 30.5 tours, alors $30t = 30.5 \times 60$. Alors, $t = 30.5 \times 2 = 61$.

Ainsi, $t = 59$ ou $t = 61$. \square

B2 Pour chaque entier positif n , définissons $\varphi(n)$ comme le nombre d'entiers positifs divisant n . Par exemple, $\varphi(10) = 4$, puisque 10 a 4 diviseurs positifs, soit $\{1, 2, 5, 10\}$.

Soit n un entier positif tel que $\varphi(2n) = 6$. Trouver la valeur minimale possible pour $\varphi(6n)$.

Solution: La réponse est 8.

Solution 1: Rappelons-nous que si entier positif m se factorise en produit de nombres premiers $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$, où p_1, \dots, p_t sont des premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de m est $\varphi(m) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_t + 1)$ (*). On remarque que chaque terme dans le produit est au moins 2.

Puisque $2n$ est un nombre entier positif et pair avec 6 diviseurs positifs, $2n = 2^5, 2^2 \cdot p$ ou $2 \cdot p^2$, où p est un nombre premier impair. Ainsi, $n = 2^4 = 16, 2p$ ou p^2 . Donc, $6n = 6 \times 16 = 96, 12p$ or $6p^2$.

On remarque que $\varphi(96) = \varphi(2^5 \times 3^1) = 6 \times 2 = 12$.

Si $p = 3$, alors $\varphi(12p) = \varphi(36) = \varphi(2^2 \times 3^2) = 3 \times 3 = 9$ et $\varphi(6p^2) = \varphi(54) = \varphi(2^1 \times 3^3) = 2 \times 4 = 8$.

Il reste à montrer le cas $p > 3$. Jusqu'à maintenant, la valeur minimale obtenue est $\varphi(6n) = 8$. Si $p > 3$, alors $6n$ possède au moins 3 différents diviseurs premiers. Donc par (*), le nombre de diviseurs positifs de $6n$ est au moins $2 \times 2 \times 2 = 8$. Ainsi, $\varphi(6n) \geq 8$ pour tous les entiers positifs n . Comme nous l'avons déjà montré, $n = 9$ mène à $\varphi(6n) = 8$. La réponse est donc 8. \square

Solution 2: On remarque que quatre diviseurs premiers de $2n$ sont $1, 2, n$ and $2n$. On remarque aussi que $n = 2$ ne satisfait pas $\varphi(2n) = 6$. Ainsi, $n \geq 2$ et donc, $1, 2, n$ et $2n$ sont tous distincts.

Comme $2n$ a 6 diviseurs positifs, il y a deux autres diviseurs a, b de $2n$, avec $a, b > 2$. Donc l'ensemble des diviseurs positifs de $2n$ est $\{1, 2, a, b, n, 2n\}$.

On s'intéresse maintenant aux diviseurs positifs de $6n$. Remarquons que ceux-ci $6n$ contiennent les diviseurs positifs de $2n$. De plus, remarquons que $3n$ et $6n$ sont des diviseurs positifs de $6n$ qui ne sont pas des diviseurs de $2n$. Ainsi, l'ensemble de diviseurs positifs de $6n$ contient $\{1, 2, a, b, n, 2n, 3n, 6n\}$. Donc, $\varphi(6n) \geq 8$.

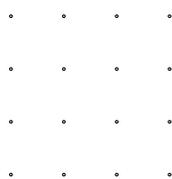
Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir ce minimum. Comme $\{1, 2, a, b, n, 2n, 3n, 6n\}$ sont des diviseurs positifs de $6n$ apparaissant en ordre croissant, $a \cdot 2n = 6n$ et $bn = 6n$. En multipliant les deux équations et en divisant de chaque côté par $2n^2$ on obtient $ab = 18$. Mais puisque $\{1, 2, a, b, n, 2n\}$ sont les diviseurs positifs de $2n$, $ab = 2n$. Ainsi, $2n = 18$, ce qui nous permet de conclure que $n = 9$ est un candidat pour obtenir $\varphi(2n) = 6$ et $\varphi(6n) = 8$.

Ceci peut être facilement vérifié puisque les diviseurs positifs de 18 sont $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. De plus, les diviseurs positifs de 54 sont $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$, $\varphi(54) = 8$. \square

B3 Étant donnée la grille de points 4 par 4 suivante, trouver le nombre de façons possibles d'étiquetter les 10 sommets $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ tel que la longueur des 9 segments

$$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ$$

est en ordre strictement croissant.



Solution: La réponse est 24.

Pour commencer, nous trouvons les longueurs possibles de segments. Par le théorème de Pythagore, les différentes longueurs sont $\sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \sqrt{0^2 + 2^2} = 2, \sqrt{0^2 + 3^2} = 3, \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$. Ces deux longueurs sont toutes différentes. Ainsi, toutes ces longueurs doivent faire partie de la suite $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ$. De plus, ces 9 longueurs en ordre croissant sont:

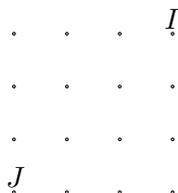
$$\begin{aligned} \sqrt{0^2 + 1^2} < \sqrt{1^2 + 1^2} < \sqrt{0^2 + 2^2} < \sqrt{1^2 + 2^2} < \sqrt{2^2 + 2^2} \\ < \sqrt{0^2 + 3^2} < \sqrt{1^2 + 3^2} < \sqrt{2^2 + 3^2} < \sqrt{3^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

La plus grande longueur doit être un segment qui relie 2 coins opposés.

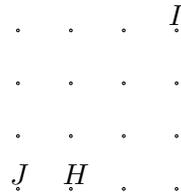
Nous trouverons les dix points dans l'ordre suivant: $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$.

Par soucis de simplicité, plaçons-nous dans le plan cartésien avec le coin inférieur gauche en $(0, 0)$ et le coin supérieur droit en $(3, 3)$.

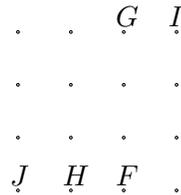
Remarquons que J doit être placé sur un coin de la grille et qu'il y a quatre coins. De plus, I doit être situé sur le coin diamétralement opposé à J . Sans perte de généralité, supposons $J = (0, 0)$. Alors $I = (3, 3)$.



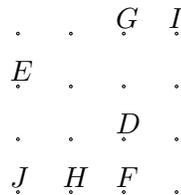
Le point H a la propriété que $HI = \sqrt{3^2 + 2^2}$, i.e. H est à une distance verticale de trois de I et une distance verticale 2 de I , ou vice versa. Par la symétrie autour de la diagonale JI , il y a deux possibilités pour H , soit $(0, 1)$ ou $(1, 0)$. Sans perte de généralité, supposons $H = (1, 0)$.



Le segment GH a longueur $\sqrt{3^2 + 1^2}$. Ainsi, G est soit $(0, 3)$ ou $(2, 3)$. Mais si $G = (0, 3)$ alors F est un point tel que $FG = 3 = \sqrt{0^2 + 3^2}$. Alors $F = (0, 0)$ ou $(3, 3)$, qui sont déjà occupés respectivement par J, I . Ainsi, G ne peut être situé en $(0, 3)$, et doit être en $(2, 3)$. Donc, $F = (2, 0)$.



EF a longueur $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$. Donc, $E = (0, 2)$. DE a longueur $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$. Ainsi, $D = (2, 1)$.



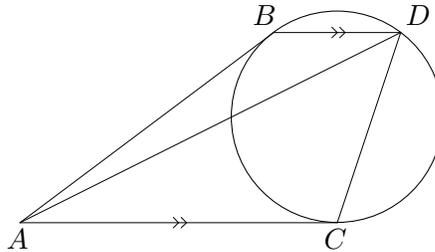
Ainsi $C = (0, 1)$ et $B = (1, 2)$.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & G & I \\ E & B & \cdot & \cdot \\ C & \cdot & D & \cdot \\ J & H & F & \cdot \end{array}$$

De B , il y a trois points restants A tel que $AB = 1$, soit $(1, 1), (1, 3), (2, 2)$.

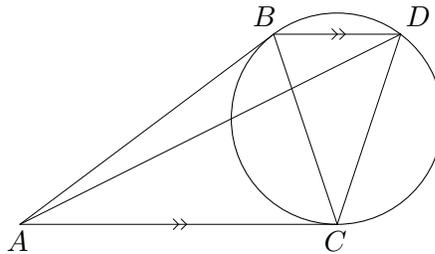
Par notre construction, les points J, H et A étaient les seuls pour lesquels nous avons eu un choix. Chaque autre point était déterminé par notre construction. Il y avait 4 choix pour J , 2 deux choix pour H et 3 choix pour A . Ainsi, le nombre de façons de choisir 10 points qui satisfont la condition est $4 \times 3 \times 2 = 24$. La réponse est 24. \square

B4 Dans le diagramme suivant, deux lignes qui se rencontrent à un point A sont tangentes à un cercle en B et C . La parallèle à AC passant par B rencontre le cercle une deuxième fois en D . On ajoute les segments CD et AD . Supposons $AB = 49$ et $CD = 28$. Trouver la longueur de AD .



Solution 1: La réponse est $AD = 63$.

Ajoutons le segment BC . Puisque AB et AC sont tangents au cercle, $AB = AC$. Ainsi, $\angle ABC = \angle ACB$.



De plus, comme BD est parallèle à AC , $\angle ACB = \angle DBC$. Puisque AC est tangente au cercle en C , par le théorème des arcs sous-tendus par des angles inscrits $\angle BDC = \angle ACB$. Ainsi, nous avons les égalités d'angles suivants:

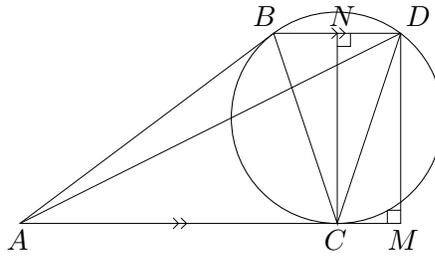
$$\angle ABC = \angle ACB = \angle CBD = \angle CDB.$$

De plus, $AB = AC$ et $CB = CD$. Donc $\triangle ABC$ est congruent à $\triangle CBD$. Ainsi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD}.$$

Puisque $AB = 49$ et $BC = CD = 28$, $BD = BC^2/AB = 28^2/49 = 4^2 = 16$.

Soit M le pied de la perpendiculaire à AC par D et N le pied de la perpendiculaire de BD par C .



Comme $CB = CD$, N est le point milieu de BD . Puisque BD est parallèle à CM , $NDMC$ est un rectangle. Ainsi, $CM = ND = \frac{1}{2} \cdot BD = 8$. On trouve maintenant la longueur DM .

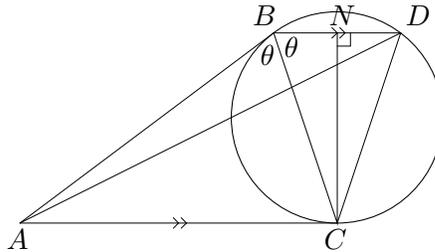
$$DM = NC = \sqrt{DC^2 - DN^2} = \sqrt{28^2 - 8^2} = \sqrt{784 - 64} = \sqrt{720}.$$

Ainsi,

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \sqrt{(AC + CM)^2 + MD^2} = \sqrt{(49 + 8)^2 + 720} = \sqrt{3969} = 63.$$

Donc la réponse est 63. \square

Solution 2: Comme dans la Solution 1, on forme le segment BC et on conclut $BC = 28$ et $BD = 16$. Encore comme dans la Solution 1, $\angle ABC = \angle ACB = \angle CBD = \angle CDB$. Soit θ cet angle.



Soit N le pied de la perpendiculaire à BD par C . Comme dans la Solution 1, N est le point milieu de BD . Ainsi, $BN = 8$. On peut maintenant trouver $\cos \theta$ de $\triangle CBN$, qui est

$$\cos \theta = \frac{BN}{BC} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

(On pourrait aussi utiliser $\triangle ABC$ pour trouver $\cos \theta$.) Remarquons que $\angle ABD = 2\theta$. On utilise maintenant la loi des cosinus sur $\triangle ABD$ pour trouver AD . Par cette loi, on trouve

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - BA \cdot BD \cdot \cos(2\theta).$$

On trouve tout d'abord $\cos(2\theta)$ par la formule de multiplication:

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 1 = -41/49.$$

Ainsi,

$$AD^2 = 49^2 + 16^2 - 2(49)(16)(-41/49) = 2401 + 256 + 2 \cdot 16 \cdot 41 = 3969.$$

Donc $AD = \sqrt{3969} = 63$. \square

Solution 3: Soit θ défini comme dans la Solution 2. Comme montré dans la Solution 2, $\cos \theta = 2/7$. Remarquons maintenant que

$$\angle BCD = 180 - \angle CBD - \angle CDB = 180 - 2\theta.$$

Ainsi, $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \theta + (180 - 2\theta) = 180 - \theta$. On applique maintenant la loi des cosinus à $\triangle ACD$.

$$\begin{aligned} AD^2 &= CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos \angle ACD = 49^2 + 28^2 - 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \cos(180 - \theta) \\ &= 2401 + 784 + 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \cos \theta = 3185 + 2 \cdot 49 \cdot 28 \cdot \frac{2}{7} = 3185 + 4 \cdot 7 \cdot 28 = 3969. \end{aligned}$$

Ainsi, $AD = \sqrt{3969} = 63$.

1 Problèmes à solution complète

Partie C

C1 Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x - 8$.

- (a) (2 points) Trouver les valeurs de $f(2)$ et $g(f(2))$.
 (b) (4 points) Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(g(x)) = g(f(x))$.
 (c) (4 points) Soit $h(x) = 3x - r$. Trouver toutes les valeurs de r pour lesquelles $f(h(2)) = h(f(2))$.

Solution:

- (a) Les réponses sont $f(2) = 4$ et $g(f(2)) = 4$.

En substituant $x = 2$ dans $f(x)$ on trouve $f(2) = 2^2 = 4$.

En substituant $x = 2$ dans $g(f(x))$ et en remarquant que $f(2) = 4$, on obtient $g(f(2)) = g(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4$. \square

- (b) Les réponses sont $x = 2$ et $x = 6$.

Remarquons que

$$f(g(x)) = f(3x - 8) = (3x - 8)^2 = 9x^2 - 48x + 64$$

et

$$g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 - 8.$$

Ainsi, nous voulons résoudre

$$9x^2 - 48x + 64 = 3x^2 - 8.$$

Nous réarrangeons les termes en une équation quadratique

$$6x^2 - 48x + 72 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 8x + 12) = 0.$$

Cette équation peut être factorisée: $6(x - 6)(x - 2) = 0$. Ainsi, $x = 2$ ou $x = 6$. On vérifie finalement qu'il s'agit bel et bien de solutions.

Si $x = 2$, alors $f(g(2)) = f(3(2) - 8) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $g(f(2)) = 4$ par la partie (a). Donc $f(g(2)) = g(f(2))$ et $x = 2$ est une solution.

Si $x = 6$, alors $f(g(6)) = f(3 \cdot 6 - 8) = f(10) = 10^2 = 100$ et $g(f(6)) = g(6^2) = g(36) = 3 \cdot 36 - 8 = 108 - 8 = 100$. Donc $f(g(6)) = g(f(6))$ et $x = 6$ est aussi une solution. \square

(c) Les réponses sont $r = 3$ et $r = 8$.

Nous calculons tout d'abord $f(h(2))$ et $h(f(2))$ en terme de r .

$$f(h(2)) = f(3 \cdot 2 - r) = f(6 - r) = (6 - r)^2$$

et

$$h(f(2)) = h(2^2) = h(4) = 3 \cdot 4 - r = 12 - r.$$

Ainsi, $(6 - r)^2 = 12 - r \Rightarrow r^2 - 12r + 36 = 12 - r$. On réarrange le tout pour trouver

$$r^2 - 11r + 24 = 0,$$

qui se factorise comme

$$(r - 8)(r - 3) = 0.$$

Donc $r = 3$ ou $r = 8$. On vérifie finalement qu'il s'agit bel et bien de solutions.

Si $r = 3$, alors $h(x) = 3x - 3$. Ainsi $f(h(2)) = f(3 \cdot 2 - 3) = f(3) = 9$ et $h(f(2)) = h(2^2) = h(4) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$. Donc $f(h(2)) = h(f(2))$ et $r = 3$ est une solution. En utilisant la partie (b), on sait déjà que $r = 8$ est une solution. \square

C2 On remplit une grille 3×3 avec des 0 et des 1. On compte un point pour chaque rangée, colonne et diagonale dont la somme des entrées est *impaire*.

1	1	0
1	0	1
0	1	1

1	1	1
1	0	1
0	1	1

Par exemple, la grille de gauche vaut 0 points et la grille sur la droite vaut 3 points.

(a) (2 points) Remplissez la grille suivante pour que celle-ci est une valeur d' exactement 1 point. Aucun travail supplémentaire n'est demandé. Plusieurs réponses sont possibles. Une seule est suffisante.

Solution: N'importe quelle grille parmi les suivantes est une solution:

0	0	0
1	1	0
1	1	0

1	1	0
1	1	0
0	0	0

0	1	1
0	1	1
0	0	0

0	0	0
0	1	1
0	1	1

0	1	1
1	1	0
1	0	1

1	0	1
1	1	0
0	1	1

1	0	1
0	1	1
1	1	0

1	1	0
0	1	1
1	0	1

(b) (4 points) Trouvez toutes les grilles qui ont une valeur d' exactement 8 points.

Solution: Remarquons qu'il y a trois lignes, trois colonnes et deux diagonales. Ainsi, chaque ligne, colonne et diagonale doit avoir une somme des entrées impaire.

Nous considérons deux cas; le cas où la case centrale vaut 0 et le cas où la case centrale vaut 1.

Cas 1: Si le nombre central est 0, alors soit A, B, C, D les valeurs des carrés suivants:

A	B	C
	0	D

Comme chaque ligne, colonne et diagonale a une somme impaire, chacun des termes opposés à A, B, C, D doit respectivement avoir une valeur différente de A, B, C, D . Écrivons $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$. On a donc la grille suivante:

A	B	C
\bar{D}	0	D
\bar{C}	\bar{B}	\bar{A}

Remarquons que $X + \bar{X} = 1$ pour toute valeur X . Remarquons de plus que $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ est $1 + 1 + 1 = 3$. Ainsi, soit $A + B + C$ ou $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ est pair. Donc soit la rangée du haut ou la rangée du bas a une valeur paire. Ainsi, il n'y a aucune grille valant 8 points dans ce cas.

Cas 2: Si le nombre central est 1, alors encore une fois soit A, B, C, D la valeur de chacune des cases suivantes.

A	B	C
	1	D

Comme la somme de toutes les lignes, colonnes et diagonales est impaire, chaque terme opposé à A, B, C, D a respectivement la même valeur que A, B, C, D . Nous avons donc la grille suivante:

A	B	C
D	1	D
C	B	A

Comme $A + B + C$ et $A + D + C$ sont tous deux impairs, $B = D$.

A	B	C
B	1	B
C	B	A

Ainsi, la dernière restriction est que $A + B + C$ soit impaire. Comme $A, B, C = 0$ ou 1, $A + B + C = 1$ ou 3. Les seuls triplets (A, B, C) qui donnent ces résultats sont $(A, B, C) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ou $(1, 1, 1)$. Les grilles suivantes sont celles qui correspondent à ces résultats, ce qui complète le problème. \square

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

0	0	1
0	1	0
1	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

- (c) (4 points) Soit E le nombre de grilles avec un nombre pair de points et O le nombre de grilles avec un nombre impair de points. Montrez que $E = O$.

Solution 1: On considère l'ensemble de toutes les grilles. On rassemble les grilles en paires pour que G soit reliée à la grille G^* formée en changeant le nombre supérieur gauche de G . (Par changer, nous voulons dire que si le nombre supérieur gauche de G est 0, nous le changeons pour un 1. Si le nombre supérieur gauche de G est 1, nous le changeons pour un 0.) Voici un exemple pour le changement de G à G^* .

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad G^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

On remarque que la somme des éléments dans la ligne supérieure, la colonne de gauche et la diagonale du coin supérieur gauche au coin inférieur droit changent de parité, i.e. change soit de impair à pair ou de pair à impair et que la somme des éléments des autres lignes / colonnes / diagonales est inchangée. Ainsi, le nombre total de rangées/colonnes/diagonales qui ont une somme impaire G et G^* diffère par un nombre impair. Donc exactement une grille entre G et G^* a un nombre pair de points et l'autre a un nombre impair de points. Comme chaque grille apparaît dans une seule paire, il y a autant de grilles avec un nombre impair de points que de grilles avec un nombre pair de points, i.e. $E = O$. \square

Remarque: La solution est semblable si on fait le changement pour n'importe quel point de la grille.

Solution 2: On remarque que la grille remplie de zéros ne compte aucun point. On remarque aussi que changer la valeur du centre d'une grille préserve la parité du nombre de points. De même, modifier les des quatre cases extérieures qui ne sont pas dans les coins préserve la parité du nombre de points. Par contre, modifier les coins change la parité..

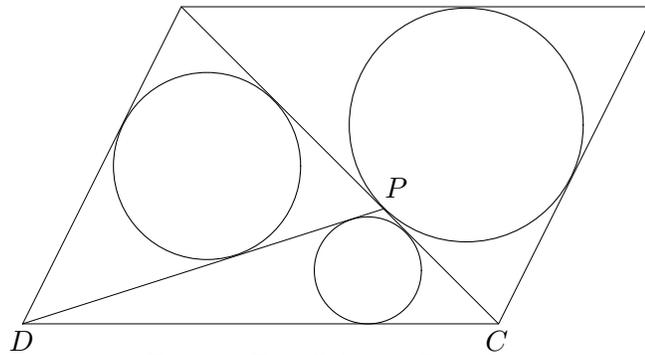
Ainsi, si une grille a 0, 2 ou 4 de ses coins qui sont des 1, alors la grille a un pointage pair. Si la grille a 1 ou 3 de ses coins qui sont des 1, alors le pointage est impair. Nous allons donc compter les grilles suivant cette observation.

Il y a cinq cases ne se trouvant pas dans des coins. Ainsi, il y a 2^5 grilles avec des coins tous 0.

Il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de choisir un seul coin valant 1. Ainsi, il y a 4×2^5 grilles avec un seul coin non nul. De la même manière, il y a $\binom{4}{2} \times 2^5 = 6 \times 2^5$ grilles avec deux coins valant 1, $\binom{4}{3} \times 2^5 = 4 \times 2^5$ grilles avec trois coins valant 1 et 2^5 grilles dont tous les coins sont 1.

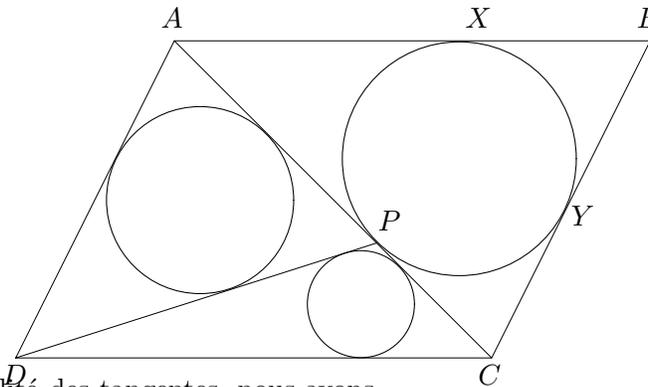
Finalement, on additionne pour trouver qu'il y a $2^5(1 + 6 + 1) = 8 \times 2^5$ grilles qui comptent un nombre pair de points et $2^5(4 + 4) = 8 \times 2^5$ grilles qui en comptent un nombre impair. Ainsi, $E = O$. \square

C3 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On trace la diagonale AC . Un cercle est dessiné à l'intérieur de $\triangle ABC$, tangent à tous les côtés et touchant AC en un point P .



(a) (2 points) Montrez que $DA + AP = DC + CP$.

Solution: Soit le cercle à l'intérieur de $\triangle ABC$ touchant respectivement AB et BC en X, Y .



Ainsi, par l'égalité des tangentes, nous avons

$$DA + AP = DA + AX = DA + AB - BX$$

et

$$DC + CP = DC + CY = DC + CB - BY.$$

Encore par l'égalité de tangentes, nous avons $BX = BY$. Comme les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur, $AB = DC$ et $DA = CB$. Ainsi, $DA + AB - BX = DC + CB - BY$. Donc $DA + AP = DC + CP$, qui est la conclusion désirée. \square

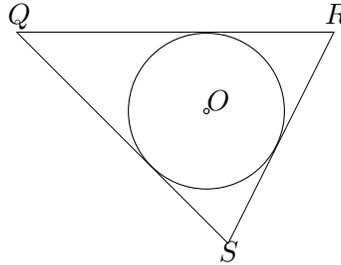
(b) (4 points) Dessinons la droite DP . Un cercle de rayon r_1 est tracé à l'intérieur de $\triangle DAP$ tangent aux trois autres côtés. Un cercle de rayon r_2 est tracé à l'intérieur de $\triangle DCP$ tangent aux trois côtés. Montrez que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{AP}{PC}.$$

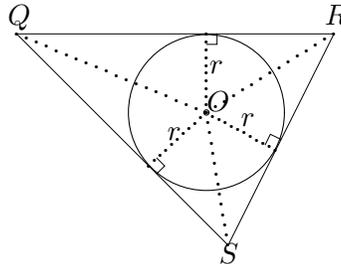
Solution: Considérons les triangles $\triangle APD$ et $\triangle CPD$ et remarquons que la hauteur de ces triangles par rapport aux côtés AP, PC est la même. Ainsi,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{[APD]}{[CPD]},$$

où $[\dots]$ désigne l'aire.



Pour n'importe quel triangle QRS avec un cercle à l'intérieur touchant aux trois côtés, soit O le centre du cercle et r le rayon du cercle. La distance de O à chacun des côtés QR, RS, SQ est la même, et est le rayon du cercle. Rejoignons OQ, OR, OS .



Alors

$$\begin{aligned} [QRS] &= [OQR] + [ORS] + [OSQ] = \frac{r \cdot QR}{2} + \frac{r \cdot RS}{2} + \frac{r \cdot SQ}{2} \\ &= \frac{r}{2} \cdot (QR + RS + SQ) = \frac{r}{2} \cdot (\text{Périmètre de } \triangle QRS). \end{aligned}$$

Alors

$$[APD] = \frac{r_1}{2} \cdot (\text{Périmètre de } \triangle APD)$$

et

$$[CPD] = \frac{r_2}{2} \cdot (\text{Périmètre de } \triangle CPD)$$

Ainsi

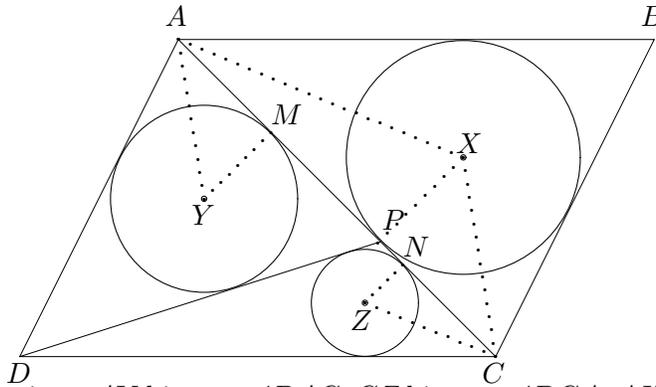
$$\frac{AP}{PC} = \frac{[APD]}{[CPD]} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\text{Périmètre de } \triangle APD}{\text{Périmètre de } \triangle CPD}.$$

Ainsi, pour montrer que $AP/PC = r_1/r_2$, il suffit de montrer que $\triangle APD, \triangle CPD$ ont le même périmètre.

Par la partie (a), nous avons $DA + AP = DC + CP$. Le périmètre de $\triangle APD$ est $DA + AP + PD = DC + CP + PD$, qui est le périmètre de $\triangle CPD$. Ceci résout le

problème. \square

Solution 2: Soit respectivement X, Y, Z les centres des cercles inscrits à $\triangle ABC$, $\triangle APD$ et $\triangle CPD$. Soit M le point où le cercle inscrit à $\triangle ADP$ touche AC et N le point où le cercle inscrit à $\triangle CDP$ touche AC . Remarquons que XP , YM et ZN sont tous perpendiculaires à AC .



Remarquons aussi que AY bissecte $\angle DAC$, CZ bissecte $\angle DCA$, AX bissecte $\angle BAC$ et que CX bissecte $\angle BCA$. Puisque AD est parallèle à BC , $\angle DAC = \angle BCA$. Ainsi, $\angle CA Y = \angle ACX$, ce qui implique que $\angle MAY = \angle PCX$. Puisque $\triangle AYM$ et $\triangle CXP$ sont des triangles rectangles, $\triangle AYM \sim \triangle CXP$. De la même manière, $\triangle CZN \sim \triangle AXP$. Donc

$$\frac{AM}{MY} = \frac{CP}{PX}, \quad \text{and} \quad \frac{CN}{NZ} = \frac{AP}{PX}.$$

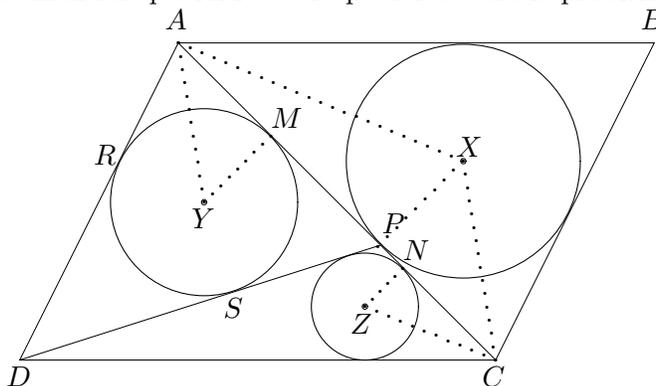
Remarquons que $MY = r_1$ et $NZ = r_2$. Ceci implique que

$$\frac{AM}{r_1} = \frac{CP}{PX}, \quad \text{and} \quad \frac{CN}{r_2} = \frac{AP}{PX}.$$

En divisant la deuxième équation par la première, on trouve que

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CN} \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $AM = CN$ pour résoudre le problème.



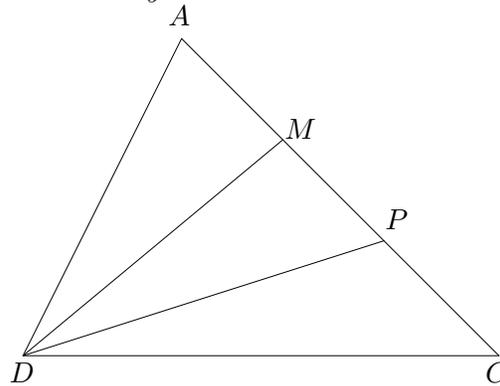
Soient R et S les points de rencontre du cercle inscrit à $\triangle DAP$ avec AD, DP . On remarque ensuite que $AR = AM, DR = DS$ et $PM = PS$. Ainsi, $DA + AP = DR + RA + AM + MP = DS + AM + AM + SP = 2AM + DP$. De la même manière, $DC + CP = 2CN + DP$. Par la partie (a), $DA + AP = DC + CP$. Donc $2AM + DP = 2CN + DP$ et on peut conclure que $AM = CN$. \square

- (c) (4 points) Supposons que $DA + DC = 3AC$ et $DA = DP$. Soit r_1, r_2 les deux rayons définis en (b). Trouvez le ratio r_1/r_2 .

Solution: La réponse est $r_1/r_2 = 4/3$.

Solution 1: Par la partie (b). $r_1/r_2 = AP/PC$. Soit $x = AP$ et $y = PC$. La réponse est le ratio x/y .

Par la partie (a), $DA + AP = DC + CP$. Soit $s = DA + AP = DC + CP$. Alors $DA = s - x$ et $DC = s - y$. Puisque $DA + DC = 3AC$, $(s - x) + (s - y) = 3(x + y)$. Ainsi, $2s = 4(x + y)$. Donc $s = 2(x + y)$. Donc $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$. Puisque $DP = DA$, $DP = x + 2y$.



On trace la perpendiculaire à AC passant par D et on note le point d'intersection avec AC par M . Puisque $DA = DP$, M est le point milieu de AP . Ainsi, $MP = x/2$. Par le théorème de Pythagore, nous avons $MD^2 + MC^2 = DC^2$ et $MD^2 + MP^2 = DP^2$. Ainsi, $DC^2 - MC^2 = DP^2 - MP^2$. Donc

$$(2x + y)^2 - (x/2 + y)^2 = (x + 2y)^2 - (x/2)^2.$$

On simplifie pour trouver

$$4x^2 + 4xy + y^2 - \frac{x^2}{4} - xy - y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Ainsi, $3x^2 - xy - 4y^2 = 0$. On factorise pour trouver $(3x - 4y)(x + y) = 0$. Puisque x, y sont des longueurs, $x + y \neq 0$. Donc $3x - 4y = 0$. Ainsi, $x/y = 4/3$. \square

Solution 2: On définit x, y comme dans la Solution 1. Ensuite, nous avons $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$ et $DP = x + 2y$. On considère les triangles $\triangle ADP$ et $\triangle CDP$. Ainsi,

$$\cos \angle APD = \frac{PA^2 + PD^2 - AD^2}{2 \cdot PA \cdot PD} = \frac{x^2 + (x + 2y)^2 - (x + 2y)^2}{2 \cdot x \cdot (x + 2y)} = \frac{x^2}{2x(x + 2y)} = \frac{x}{2(x + 2y)}$$

et

$$\cos \angle CPD = \frac{PC^2 + PD^2 - CD^2}{2 \cdot PC \cdot PD} = \frac{y^2 + (x + 2y)^2 - (2x + y)^2}{2 \cdot y \cdot (x + 2y)} = \frac{-3x^2 + 4y^2}{2y(x + 2y)}.$$

Puisque $\angle APD$ et $\angle CPD$ ont comme somme 180° , le signe de leur cosinus est différent. Ainsi,

$$\frac{-x}{2(x + 2y)} = \frac{-3x^2 + 4y^2}{2y(x + 2y)} \Rightarrow -x = \frac{-3x^2 + 4y^2}{y}.$$

L'expression se simplifie à $3x^2 - xy - 4y^2 = 0$. On factorise pour trouver $(3x - 4y)(x + y) = 0$. Comme dans la Solution 1, on trouve $x/y = 4/3$. \square

Solution 3: On définit x, y comme dans la Solution 1. Ainsi, nous avons $DA = x + 2y$ et $DC = 2x + y$ et $DP = x + 2y$. On trouve maintenant $\cos \angle DAP$ en utilisant la loi des cosinus pour $\triangle DAP$ et $\triangle DAC$.

$$\begin{aligned} \cos \angle DAP &= \frac{AD^2 + AP^2 - DP^2}{2 \cdot AD \cdot AP} \\ &= \frac{(x + 2y)^2 + x^2 - (x + 2y)^2}{2 \cdot (x + 2y) \cdot x} = \frac{x^2}{2x(x + 2y)} = \frac{x}{2(x + 2y)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \cos \angle DAC &= \frac{AD^2 + AC^2 - DC^2}{2 \cdot AD \cdot AC} \\ &= \frac{(x + 2y)^2 + (x + y)^2 - (2x + y)^2}{2 \cdot (x + 2y)(x + y)} = \frac{-2x^2 + 2xy + 4y^2}{2(x + 2y)(x + y)} = \frac{-(x - 2y)(x + y)}{(x + 2y)(x + y)} = \frac{-x + 2y}{x + 2y}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{x}{2(x + 2y)} = \frac{-x + 2y}{x + 2y}.$$

Dons $x = 2(-x + 2y)$. Ceci se simplifie à $x/y = 4/3$. \square

C4 Pour un entier positif quelconque n , un n -uplet d'entiers positifs (x_1, x_2, \dots, x_n) est dit *super-carré* s'il satisfait les propriétés suivantes:

- (1) $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$.
- (2) La somme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ est un carré parfait pour chaque $1 \leq k \leq n$.

Par exemple, $(12, 9, 8)$ est un super-carré, puisque $12 > 9 > 8$, et que chacun des 12^2 , $12^2 + 9^2$, et $12^2 + 9^2 + 8^2$ est un carré parfait.

- (a) (2 points) Trouvez toutes les valeurs de t telles que $(32, t, 9)$ est un super-carré.

Solution: La seule solution est $t = 24$.

Remarquons que $32^2 + t^2 = 1024 + t^2$ et $32^2 + t^2 + 9^2 = 1105 + t^2$ sont des carrés parfaits. Ainsi il existe des entiers positifs a, b tel que

$$\begin{aligned} 1024 + t^2 &= a^2 \\ 1105 + t^2 &= b^2. \end{aligned}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on trouve

$$b^2 - a^2 = 81 \Rightarrow (b - a)(b + a) = 81.$$

La seule façon pour 81 d'être écrit comme un produit de deux entiers positifs distincts est $81 = 1 \times 81$ and $81 = 3 \times 27$.

Si $(b - a, b + a) = (1, 81)$, alors $b - a = 1$ et $b + a = 81$. En additionnant ces deux équations on obtient $2b = 82$. Donc $b = 41$ et $a = 40$. Ainsi, $t^2 = a^2 - 32^2 = 40^2 - 32^2 = 8^2(5^2 - 4^2) = 8^2 \cdot 3^2$. Donc $t = 24$.

On vérifie maintenant que $(32, 24, 9)$ est bel et bien un super-carré. Le triplet est clairement décroissant donc il satisfait la condition (1). Pour terminer, $32^2 + 24^2 = 8^2(4^2 + 3^2) = 8^2 \cdot 5^2 = 40^2$ et $32^2 + 24^2 + 9^2 = 40^2 + 9^2 = 1681 = 41^2$. Ainsi, le triplet satisfait donc aussi la condition (2).

Si $(b - a, b + a) = (3, 27)$, alors $b - a = 3$ et $b + a = 27$. On additionne les deux équations pour trouver $2b = 30$. Ainsi, $b = 15$ et $a = 12$. Donc $t^2 = a^2 - 32^2 = 12^2 - 32^2 < 0$. Il n'y a donc aucune solution pour t dans ce cas.

Ainsi, $t = 24$ est la seule solution.

- (b) (2 points) Trouvez un 4-tuplet super-carré (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$.

Solution: Remarquons que si (x_1, \dots, x_n) est un super-carré, alors (ax_1, \dots, ax_n) est aussi un super-carré pour tout entier positif a . Nous allons montrer que ce

tuplet satisfait (1) et (2) pour s'assurer que c'est un super-carré. Comme $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, $ax_1 > ax_2 > \dots > ax_n$. Puisque $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ est un carré parfait, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = m^2$ pour un entier positif m . Ainsi, $(ax_1)^2 + \dots + (ax_k)^2 = (am)^2$. Donc (ax_1, \dots, ax_n) est un super-carré.

est un super-carré. Ainsi, $12(12, 9, 8) = (144, 108, 96)$ est aussi un super-carré. Remarquons que $12^2 + 9^2 + 8^2 = 17^2$. Ainsi, $144^2 + 108^2 + 96^2 = 204^2 = 12^2 \cdot 17^2$.

On remarque que $13^2 \cdot 17^2 = (12^2 + 5^2) \cdot 17^2 = 12^2 \cdot 17^2 + 5^2 \cdot 17^2 = 12^2 \cdot 17^2 + 85^2$. Donc $221^2 = 13^2 \times 17^2 = 144^2 + 108^2 + 96^2 + 85^2$. Ainsi, on peut conclure que $(144, 108, 96, 85)$ est un super-carré.

Remarque: La liste des 4-tuplets super-carré (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$ est

$(132, 99, 88, 84)$, $(144, 108, 75, 28)$, $(144, 108, 96, 85)$, $(156, 117, 104, 60)$, $(180, 96, 85, 60)$,
 $(180, 135, 120, 32)$, et $(192, 144, 100, 69)$.

(c) (6 points) Dire s'il existe un 2012-tuplet super-carré.

Solution: Il existe un 2012-tuplet super-carré.

Nous allons montrer qu'il existe un n -tuplet super-carré pour tout entier positif $n \geq 3$. Nous allons le montrer par induction sur n . Par l'énoncé du problème et la partie (b), nous avons déjà montré le résultat pour $n = 3, 4$.

Supposons qu'il existe un k -tuplet super-carré (x_1, x_2, \dots, x_k) pour un entier positif $k \geq 3$. À partir de ce k -tuplet super-carré, nous allons montrer qu'il existe un $(k + 1)$ -tuplet super-carré.

Soit a, b, c un triplet d'entiers positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Nous allons donner des conditions supplémentaires sur (a, b, c) dans un instant.

Soit r un entier positif tel que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = r^2$. Comme dans la partie (b), on remarque que si (x_1, \dots, x_k) est un super-carré, alors (ax_1, \dots, ax_k) est aussi un super-carré et $(ax_1)^2 + \dots + (ax_k)^2 = (ar)^2$. On affirme que (ax_1, \dots, ax_k, br) satisfait la propriété (2) des super-carrés. Clairement $(ax_1)^2 + \dots + (ax_t)^2$ est un carré parfait puisque (ax_1, \dots, ax_k) est un carré parfait, pour tout $1 \leq t \leq k$. Pour montrer l'affirmation, il reste à montrer que $(ax_1)^2 + \dots + (ax_k)^2 + (br)^2$ est un carré parfait. Ceci est vrai puisque cette quantité est égale à $(ar)^2 + (br)^2 = r^2(a^2 + b^2) = (cr)^2$. Ceci complète la démonstration de l'affirmation.

Pour que le n -tuplet (ax_1, \dots, ax_k, br) soit un super-carré, on doit avoir que $ax_k > br$, ou de façon équivalente que $a/b > r/x_k$. Remarquons que r, x_k sont déterminés

par le k -tuplet (x_1, \dots, x_k) . Ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un triplet Pythagoricien (a, b, c) , avec $a^2 + b^2 = c^2$ tel que $a/b > r/x_k$. Nous devons montrer que a/b peut être arbitrairement grand.

Remarquons que $(a, b, c) = (m^2 - 1, 2m, m^2 + 1)$ est un triplet Pythagoricien pour tout entier positif m . Ceci est vrai puisque $(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2$. Dans un tel cas,

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2 - 1}{2m} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2m} > \frac{m}{2} - 1,$$

qui peut être pris arbitrairement grand. La preuve par induction est donc complète.
 \square