DOCM 2021 solutions non-officielles

7 novembre 2021

Partie A

1. **A1** Étant donné un nombre réel x vérifiant $(x-2)(x+2) = 2021$, déterminez la valeur de $(x-1)(x+1)$.

   Solution : En développant $(x-2)(x+2) = 2021$, on obtient $x^2-4 = 2021$. Il s'ensuit alors que $x^2 = 2025$. Ainsi, $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 = 2025 - 1 = 2024$.

   Réponse : $\boxed{2024}$.

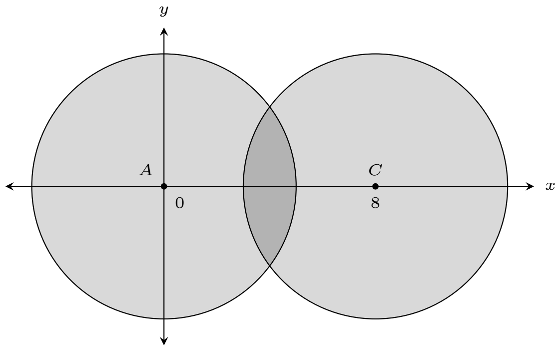
2. **A2** Il a fallu quatre jours à Julie pour manger la totalité des friandises contenues dans une boîte. Au cours du premier jour, elle a mangé $\frac{1}{5}$ du nombre total de friandises. Le deuxième jour, elle a mangé la moitié des friandises qui restaient au terme du premier jour. Le troisième jour, elle a mangé la moitié des friandises qui restaient au terme du deuxième jour. Quelle portion des friandises initialement contenues dans la boîte a-t-elle mangée au cours du quatrième jour ? Exprimez votre réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

   Solution :

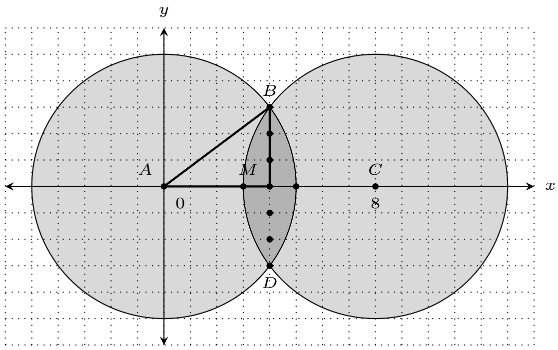
Jour #	1	2	3	4
part du total ayant été mangée	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
part restante	$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$	0

   Réponse : $\boxed{1/5}$.

3. **A3** Deux cercles dont les rayons mesurent 5 unités sont tracés dans le plan cartésien. Les coordonnées de leur centre respectif, désignés par A et C, sont $(0,0)$ et $(8,0)$. Combien de points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers y-a-t-il dans l'intersection (incluant la frontière) de ces deux cercles ?



Solution : Soit M le point milieu du segment AC et soient B et D les points situés à l'intersection des circonférences des deux cercles. Alors le segment AM mesure 4 unités et AMB est un triangle rectangle avec $AB = 5$ unités.



Comme $3 - 4 - 5$ est un triplet pythagoricien, on a que $MB = 3$ unités. Ainsi, il y a 7 points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers sur le segment BD (en incluant les extrémités). Notons qu'il y a deux autres points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers sur la frontière de l'intersection : les coordonnées de ceux-ci sont $(3, 0)$ et $(5, 0)$ respectivement. Il y a donc un total de 9 points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers.

Réponse : $\boxed{9}$.

4. **A4** Mariya se rend à l'école en combinant la marche et la planche à roulettes. Elle peut s'y rendre en 38 minutes si elle marche pendant 25 minutes et qu'elle se déplace en planche à roulettes pendant 13 minutes, ou encore elle peut s'y rendre en 31 minutes si elle marche pendant 11 minutes et qu'elle se déplace en planche à roulettes pendant 20 minutes. Combien de temps (en minutes) lui faudrait-il pour se rendre à l'école uniquement en marchant ?

   Solution : Notons sa vitesse de marche par m, sa vitesse en planche à roulettes par p et la distance la séparant de l'école par D. On a alors

   $$D = 25m + 13p, \qquad \text{et} \qquad D = 11m + 20p.$$

   En soustrayant, on obtient $7p = 14m$, d'où l'on tire que $D = 51m$. Ainsi, il lui faudra 51 minutes.

   De façon alternative, on note qu'en diminuant le temps en planche à roulettes de 7 minutes on fait croître le temps total nécessaire de 7 minutes. Ainsi, diminuer le temps en planche à roulettes de 13 minutes fera croître le temps total nécessaire de 13 minutes, le faisant passer de 38 à 51 minutes.

Réponse : $\boxed{51}$.

Partie B

5. **B1** Un sac contient deux dés de forme régulière (c'est-à-dire de forme cubique) de taille identique. L'un des dés a le chiffre 2 inscrit sur chacune de ses faces. L'autre dé a le chiffre 2 inscrit sur trois de ses faces et le chiffre 4 inscrit sur chacune des faces opposées à celles sur lesquelles est inscrit le chiffre 2. On pige un dé et on regarde l'une de ses faces ; il y est inscrit le chiffre 2. Quelle est la probabilité que la face opposée à celle que l'on observe porte également le chiffre 2 ? Exprimez votre réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

   Solution : La face que l'on observe pourrait être n'importe quelle des 9 faces portant un 2 (il pourrait s'agir de l'une des 6 faces du premier dé ou de l'une des 3 faces du second dé portant un 2). Dans 6 de ces cas, la face opposée porte aussi un 2. La probabilité est donc $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

   Réponse : $\boxed{2/3}$.

6. **B2** Quel est le coefficient du terme x^{2021} dans l'expression obtenue en développant le produit

   $$(2021x^{2021} + 2020x^{2020} + \cdots + 3x^3 + 2x^2 + x)(x^{2021} - x^{2020} + \cdots + x^3 - x^2 + x - 1)$$

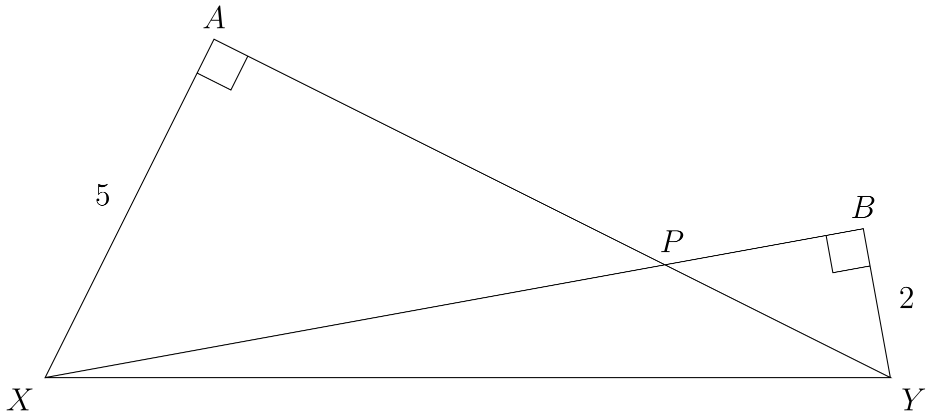
   et en simplifiant l'expression obtenue ?

   Solution : Lorsque l'on développe les termes où figure x^{2021}, on obtient

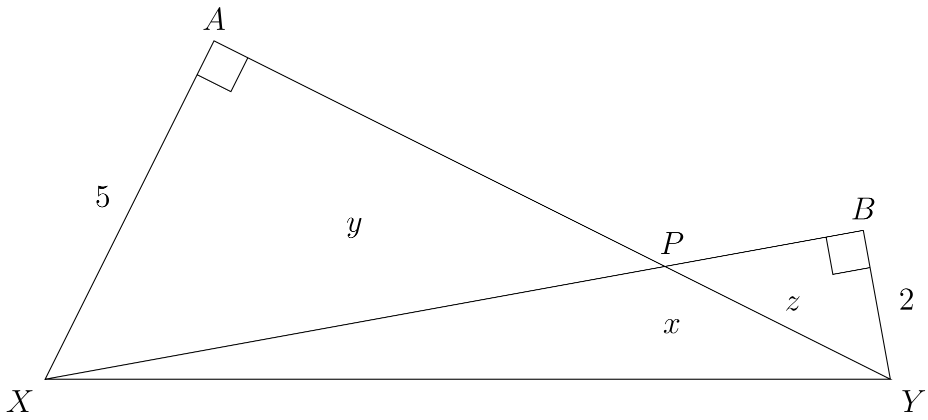
   $$\begin{aligned}(2021x^{2021})(-1) + (2020x^{2020})(x) + (2019x^{2019})(-x^2) + \cdots &= \\ &= -2021x^{2021} + 2020x^{2021} - 2019x^{2021} + \cdots \\ &= (-2021 + [2020 - 2019] + [2018 - 2017] + \cdots + [4 - 3] + [2 - 1])x^{2021} \\ &= (-2021 + 1010 \times 1)x^{2021} \\ &= -1011x^{2021}\end{aligned}$$

   $\therefore$ Le coefficient de x^{2021} est -1011.

7. **B3** Deux triangles rectangles ΔAXY et ΔBXY partagent une hypothénuse commune XY. On connaît la mesure (en unité) de certains des côtés de ces triangles : $AX = 5$, $AY = 10$ et $BY = 2$. Les côtés AY et BX se rencontrent en P. Déterminez l'aire (en unité carré) de ΔPXY.



Solution :



À partir des mesures des côtés de AXY qui sont connues, on trouve que $XY^2 = 125$. De même, à partir des mesures des côtés de BXY qui sont connues, on trouve que $BX = 11$. Si x, y et z désignent – tel qu'illustré ci-dessus – l'aire des trois triangles, on obtient :

$$x + y = \frac{1}{2}(5)(10) = 25$$
$$x + z = \frac{1}{2}(2)(11) = 11$$

Comme ΔPAX et ΔPBY sont des triangles rectangles et comme $\angle APX = \angle BPY$, il s'ensuit que ces deux triangles sont similaires. Comme $\frac{BY}{AX} = \frac{2}{5}$, on déduit que $z = \left(\frac{2}{5}\right)^2 y = \frac{4}{25}y$. En substituant ces valeurs dans le système d'équations ci-dessus et en résolvant, on trouve que l'aire recherchée est $\frac{25}{3}$ unités carrés.

Réponse : $\boxed{25/3}$.

8. **B4** L'équation $\sin x = \frac{x}{2021\pi}$ possède exactement n solutions. Trouvez n.
Solution : Notons que $x = 0$ est une solution évidente.
Comme ces deux fonctions sont impaires, la symétrie implique que si x^* est une solution alors $-x^*$ en est aussi une.
Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, toutes les solutions se situent dans l'intervalle pour lequel on a $-1 \leq \frac{x}{2021\pi} \leq 1$, à savoir $[-2021\pi, 2021\pi]$.

La fonction $y = \sin x$ est 2π-périodique. Il y a 1010 périodes complètes et une demi-période dans l'intervalle $(0, 2021\pi]$. Il y a 2 intersections de la droite $y = \frac{x}{2021\pi}$ et du sinus dans chaque période, à l'exception de la première – c'est-à-dire $(0, 2\pi]$ – où il n'y en a qu'une seule. Il y a également deux intersections dans la dernière demi-période. Par conséquent, il y a $1 + 2020 = 2021$ solutions sur $(0, 2021\pi]$. De même, il y a 2021 solutions sur $[-2021\pi, 0)$. Il y a donc un total de $n = 1 + 2 \times 2021 = 4043$ solutions.
Réponse : $\boxed{4043}$.

Partie C

9. **C1**

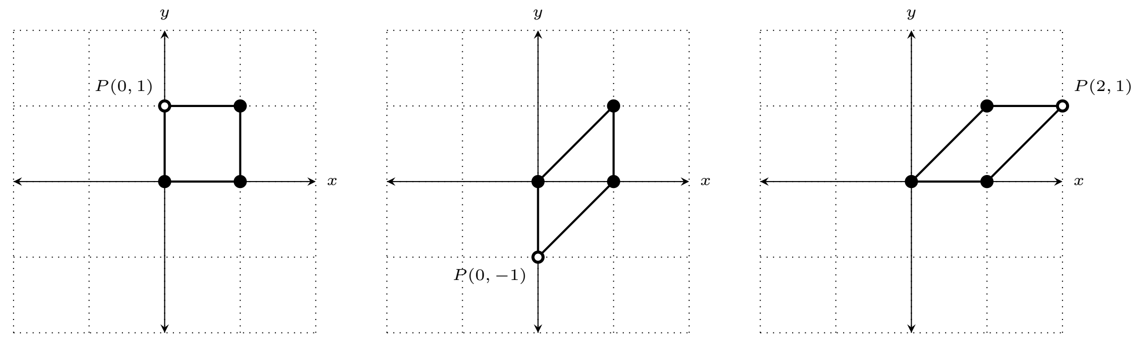
(a) Déterminez tous les points $P(x, y)$ pour lesquels $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ et P sont les sommets d'un parallélogramme.

(b) Deux droites parallèles croisent la parabole (horizontale) $x = y^2$ en quatre points distincts : $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(9, 3)$ et Q. Déterminez toutes les coordonnées possibles du point Q.

(c) Deux droites parallèles croisent la parabole $x = y^2$ en quatre points distincts : $(0, 0)$, $(1, 1)$, (a^2, a) et V. Notez que $a \neq 0, \pm 1$ désigne ici un nombre réel. Déterminez toutes les coordonnées possibles pour le point V. La réponse doit être exprimée en fonction de a.

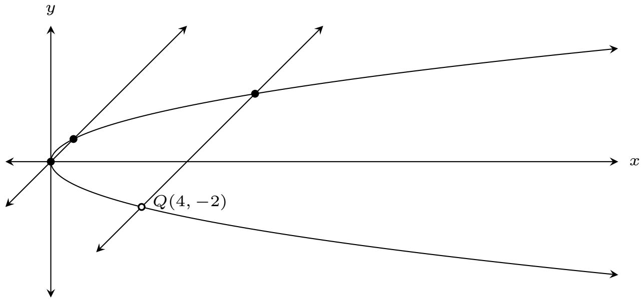
Solution :

(a) Il y a trois possibilités pour P : $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$.

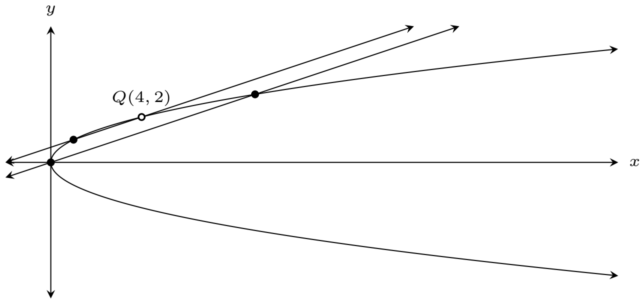


(b) Il y a trois paires possibles de droites parallèles – la droite passant $(0, 0)$ peut passer par $(1, 1)$ ou $(9, 3)$ ou Q.

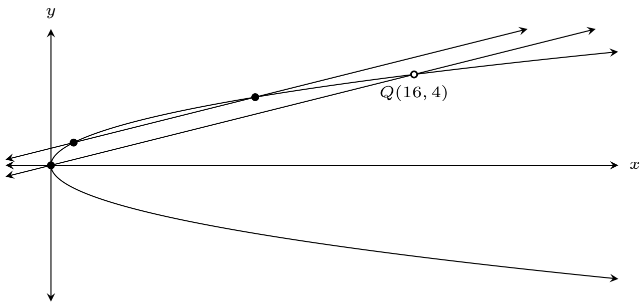
— La droite passant par $(0, 0)$ et $(1, 1)$ est parallèle à $y = x - 6$ qui passe par $(9, 3)$. Les solutions de $y + 6 = y^2$ nous donnent la coordonnée y des points d'intersection de $x = y + 6$ et $x = y^2$. On trouve $y = 3$ et $y = -2$. Ainsi la coordonnée y de Q est -2 et il s'ensuit que $x = 4$.



— La droite passant par $(0,0)$ et $(9,3)$ est parallèle à $y = \frac{x+2}{3}$ qui passe par $(1,1)$. Les solutions de $3y-2 = y^2$ sont $y = 1$ ou $y = 2$. Ainsi la coordonnée y de Q est 2 et il s'ensuit que $x = 4$.



— La droite passant par $(1,1)$ et $(9,3)$ est parallèle à $y = \frac{x}{4}$ qui passe par $(0,0)$. La solution non nulle de $4y = y^2$ est $y = 4$. Ainsi, la coordonnée y de Q est 4 et il s'ensuit que $x = 16$



Ainsi le point Q peut être situé en $(4,-2)$, $(4,2)$ et $(16,4)$.

(c) Il y a trois paires possibles de droites parallèles – la droite passant par $(0,0)$ peut également passer par $(1,1)$ ou (a^2,a) ou V.

— La droite passant par $(0,0)$ et $(1,1)$ est parallèle à $y = x+a-a^2$ qui passe par (a^2,a). Les solutions de $y + a(a-1) = y^2$ nous donnent la coordonnée y des points d'intersections. Il s'agit de $y = a$ ou $y = 1-a$. Ainsi la coordonnée y de V est $1-a$ et il s'ensuit que $x = (1-a)^2$.

— La droite passant par $(0,0)$ et (a^2,a) est parallèle à $y = \frac{x+a-1}{a}$ qui passe par $(1,1)$. Les solutions de $ay+1-a = y^2$ sont $y = 1$ ou $y = a-1$. Ainsi la coordonnée y de V est $a-1$ et il s'ensuit que $x = (a-1)^2$.

— La droite passant par $(1,1)$ et (a^2,a) est parallèle à $y = \frac{x}{a+1}$ qui passe par $(0,0)$. La solution non nulle de $(a+1)y = y^2$ est $y = a+1$. Ainsi, la coordonnée y de V est $a+1$ et il s'ensuit que $x=(a+1)^2$.

Ainsi le point V pourrait être situé en $((a-1)^2, \pm(a-1)$ et $((a+1)^2, a+1)$.

10. **C2** Soient $m, n \geq 2$ des entiers positifs. Chaque composante d'une grille $m \times n$ contient un nombre réel dans l'intervalle $[-1,1]$, c'est-à-dire entre -1 et 1 inclusivement. La grille possède également la propriété suivante : la somme des quatre composantes dans chaque *sous-grille* 2×2 est égale à 0. (Une sous-grille 2×2 est l'intersection de deux rangées adjacentes et de deux colonnes adjacentes de la grille d'origine.)

    Soit S la somme de toutes les composantes de la grille.

    (a) Supposons que $m = 6$ et $n = 6$. Expliquez pourquoi $S = 0$.

    (b) Supposons que $m = 3$ et $n = 3$. Si les éléments de la grille sont

a	b	c
d	e	f
g	h	i

    ,

    montrez que $S + e = a + i = c + g$.

    (c) Supposons que $m = 7$ et $n = 7$. Déterminez la valeur maximale que peut prendre S.

    Solution :

    (a) Une grille 6×6 peut être partitionnée en sous-grilles 2×2 puisqu'il y a un nombre pair de carrés de chaque côté. Puisque la somme des composants de chacune des sous-grilles est 0, la somme de toutes les composantes de la grille est 0. Ainsi $S = 0$.

    (b) On a $S = a+b+c+d+e+f+g+h+i$ et la somme des quatre composantes dans chaque sous-grilles 2×2 est égale à 0. Ainsi

    $$S + e = (b+c+e+f) + (d+e+g+h) + a + i = 0 + 0 + a + i = a + i.$$

    $$S + e = (a+b+d+e) + (e+f+h+i) + c + g = 0 + 0 + c + g = c + g.$$

    (c) La réponse est 7.

    La somme de toutes les composantes de la grille peut être déterminée plus simplement en tirant profit du constat suivant :

    Constat : Dans les composantes suivantes d'une grille 3×3

a	b	c
d	e	f
0	h	i

    ,

la somme de toutes les composantes est $S = c - e$. La preuve découle de (b) en posant $g = 0$.
On peut partitionner la grille 7×7 ainsi :

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_4	b_4	c_4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	d_4	e_4	f_4
$\cdots$	$\cdots$	a_3	b_3	c_3	g_4	h_4
$\cdots$	$\cdots$	d_3	e_3	f_3	$\cdots$	$\cdots$
a_2	b_2	c_2	g_3	h_3	$\cdots$	$\cdots$
d_2	e_2	f_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_1	g_2	h_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Les composantes non identifiées peuvent être décomposées en grilles 2×2, donc leur somme est 0. Par conséquent, il découle de cette observation et du constat dressé plus haut que la somme de toutes les composantes de la grille 7×7 est

$$c_1 - e_2 + c_2 - e_3 + c_3 - e_4 + c_4.$$

Comme chaque composante est située entre -1 et 1 inclusivement, cette somme vaut au plus 1. Ainsi, la somme de toutes les composantes est au plus 7. Cette somme maximale peut être obtenue comme suit :

1	0	1	0	1	0	1
0	-1	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	-1	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	-1	0	-1	0	-1	0
1	0	1	0	1	0	1

ou encore en procédant comme en (b) :

1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1

11. **C3** Xintong joue à un jeu qui consiste à transformer un nombre à six chiffres en un autre nombre du même type. Les nombres peuvent débuter par un ou plusieurs zéros, mais ils ne peuvent ni aller au-delà de 6 chiffres ni descendre sous 0. Il peut uniquement réaliser les transformations suivantes :
   - P : effectuer une permutation de sorte à envoyer le dernier chiffre au début (par exemple $092347 \to 709234$) ;
   - A : ajouter 1001 au nombre (par exemple $709234 \to 710235$) ;

• S : soustraire 1001 au nombre (par exemple 709234 → 708233).

Il peut toutefois réaliser ces transformation autant de fois qu'il le désire et dans l'ordre qui lui plaît :

(a) Montrez qu'il est possible de transformer 202122 en 313233.

(b) Montrez que transformer 999999 en 000000 peut être accompli en huit coups.

(c) Montrez que tout multiple de 11 demeure un multiple de 11 au terme de n'importe quelle enchaînement de coups ;

(d) Montrez qu'il est impossible de transformer 112233 en 000000.

Solution :

(a) Pour obtenir le nombre désiré il faut ajouter 1 à chacun des chiffres composant le nombre de départ. Par conséquent, toute combinaison de trois additions à des chiffres différents et de six permutations fera l'affaire. Par exemple, on peut y arriver en appliquant $A, P, A, P, A, P, P, P, P$.

(b) L'enchaînement de coups suivant fait l'affaire : S, P, A, P, P, A, P, S.

(c) Cela peut être fait de la même manière que pour la partie suivante, ou en utilisant l'argument suivant ≪Si n est composé des chiffres $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, alors n est divisible par 11 si et seulement si $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ l'est.≫L'addition ou la soustraction de 1001 ne changent pas la somme. La permutation, quant à elle, la rend négative, préservant ainsi la divisibilité par 11.

(d) On peut montrer que la (non-)divisibilité par 7 ou par 11 ou par 13 est un invariant. Si n n'est pas divisible par 7 ou par 11 ou par 13, alors il en va de même pour $n \pm 1001$ puisque $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Si k dénote le dernier chiffre de n, alors la permutation a pour effet de remplacer n par $\frac{n-k}{10} + 10^5 k$. En multipliant par 10 et en observant que $10^6 \equiv 1$ modulo chacun des nombres $7, 11$ et 13, on obtient que le nombre obtenu après une permutation est congruent à $\frac{n}{10}$ pour chacun d'eux, ou, de façon équivalente, le nouveau nombre est $5n$ mod 7, $-n$ mod 11 et $4n$ mod 13. Ainsi, tout nombre qui n'est pas un multiple de 7 ou de 11 ou de 13 ne peut pas être transformé en l'un d'eux.

Notons que $112233 \equiv 2123 \equiv 121 \pmod 7$. Ce nombre ne peut donc pas être transformé en 000000.

12. **C4** On dit d'une paire (F, c) qu'elle est *bonne* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(1) $F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_m x^m$, $(m \geq 1)$ est un polynôme non constant à coefficients entiers.

(2) c est un nombre réel qui n'est pas un entier.

(3) $F(c)$ est un entier.

Par exemple, les paires $(6x, \frac{1}{3})$ et $(1 + x^3, 5^{1/3})$ sont toutes deux bonnes mais aucune des paires $(6x, \frac{1}{4})$, $(6x, 2)$, $(\frac{x}{6}, \frac{1}{3})$ et $(\frac{x^2}{6}, 6)$ n'est bonne.

(a) Soit $c = \frac{1}{2}$. Donnez un exemple d'un polynôme F pour lequel la paire (F, c) est bonne mais $(F, c + 1)$ ne l'est pas.

(b) Soit $c = \sqrt{2}$. Donnez un exemple d'un polynôme F pour lequel les paires (F, c) et $(F, c+1)$ sont bonnes.

(c) Montrez que pour toute bonne paire (F, c), si c est un nombre rationnel alors il existe une infinité d'entiers non nuls n pour lesquels la paire $(F, c+n)$ est bonne.

(d) Montrez que si la paire $(F, c+n)$ est bonne pour tout entier n, alors c est un nombre rationnel.

Solution

(a) $F(x) = 2x^3 + x^2 + x$; $F(\frac{1}{2}) = 1$ et $F(\frac{3}{2}) = \frac{21}{2}$.

(b) $F(x) = (x^2 - 2)((x-1)^2 - 2))$; $F(\sqrt{2}) = F(\sqrt{2}+1) = 0$.

(c) Soit $c = \frac{p}{q}$ et soit $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. Alors $F(c+n) - F(c) = \sum_{i=0}^{m} a_i \left((c+n)^i - c^i\right)$. Pour tout $1 \le i \le m$ on a

$$(c+n)^i - c^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} c^j n^{i-j} - c^i = n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} c^j n^{i-1-j} = n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^j n^{i-1-j}.$$

Si l'on choisit $n = q^k$, $k \ge m-1$ alors chacune de ces différences est un entier. Par conséquent, il y a une infinité de choix possibles pour n.

(d) Supposons, au contraire, qu'il y ait un nombre irrationnel c pour lequel $F(c+n)$ est un entier quel que soit l'entier n. Considérons alors un tel polynôme F de degré minimal. Il est évient que F n'est pas linéaire. Or le degré du polynôme $G(x) = F(x+1) - F(x)$ est strictement inférieur à celui de F (il est égal au degré de F moins 1). De plus, ce polynôme prend des valeurs entières en $c+n$, quel que soit l'entier n. Il s'agit là d'une contradiction.

Notons que si $c = \frac{p}{q}$ est rationnel alors $F(x) = qx$ produit les bonnes paires recherchées.