PROBLÈMES D'AVRIL

Veuillez envoyer vos solutions à
Dr. Valeria Pandelieva
641 Kirkwood Avenue
Ottawa, ON K1Z 5X5
au plus tard le **31 mai, 2001**, et au plus tôt le *21 mai, 2001*.

73. Résolvez l'équation:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^x = 2^x \ .$$

74. Démontrez que dans n'importe quelle collection de $n+2$ nombres naturels, on peut en trouver deux dont la somme ou la différence est divisible par $2n$.

75. Trois nombres naturels consécutifs, tous plus grands que 3, représentent les longueurs des côtés d'un triangle. L'aire de ce triangle est aussi un nombre entier.

(a) Démontrez qu'une des altitudes coupe le triangle en deux triangles dont les longueurs de côtés sont aussi des nombres entiers.

(b) L'altitude identifiée en (a) divise le côté qui lui est perpendiculaire en deux segments. Trouvez la différence entre les longueurs de ces segments.

76. Résolvez le système d'équations:

$$\log x + \frac{\log(xy^8)}{\log^2 x + \log^2 y} = 2 \ ,$$

$$\log y + \frac{\log(x^8/y)}{\log^2 x + \log^2 y} = 0 \ .$$

(Les logarithmes sont en base 10.)

77. n points sont choisis de la circonférence ou de l'intérieur d'un hexagone régulier dont les côtés ont longueur 1 tels que la distance entre chaque paire de points est au moins $\sqrt{2}$. Quelle est la plus grande valeur possible de n?

78. Un camion a parcouru le trajet de la ville A à la ville B en plusieurs jours. Au cours de la première journée, il a parcouru $1/n$ de la distance totale, où n est un nombre naturel. La deuxième journée, il a parcouru $1/m$ de la distance restante, où m est un nombre naturel. La troisième journée, il a parcouru $1/n$ de la distance qui restait après la deuxième journée, et la quatrième journée, $1/m$ de la distance qui restait après la troisième journée. On sait qu'après quatre jours, $3/4$ de la distance entre A et B est couverte, et $m < n$. Déterminez m et n.