

PROBLÈMES D'AOÛT

Veillez envoyer vos solutions à
E.J. Barbeau
Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, ON M5S 3G3

au plus tard le **30 septembre 2001**. Ne soumettez pas vos solutions sous forme d'attachement électronique, à moins qu'il ne s'agisse d'un fichier TeX. Assurez-vous que votre nom, adresse et adresse courriel figurent sur la première page de votre envoi.

Notes. Une *hyperbole rectangulaire* est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

97. Les trois sommets d'un triangle sont situés sur une hyperbole rectangulaire. Démontrez que l'orthocentre de ce triangle est aussi sur cette hyperbole.
98. Étant donné $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n$, des nombres réels non négatifs tels que
(i) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1} = 0$,
(ii) pour $k = 1, 2, \dots, n$ on a $0 \leq b_k \leq 1$.
Supposons que $m = \lfloor b_1 + b_2 + \dots + b_n \rfloor + 1$. Démontrez que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^m a_k .$$

99. Dans un triangle ABC on choisit un point E sur le côté AB et un point F sur le côté BC tels que $AE = CF$. Les cercles déterminés respectivement par les points A, B, F et B, C, E s'intersectent en deux points B et D . Démontrez que la droite passant par B et D est la bissectrice de l'angle ABC .
100. Dix points sont disposés régulièrement autour d'un cercle. En joignant les points consécutifs, on obtient un décagone régulier P inscrit dans le cercle. En joignant chaque point au troisième point qui le suit (dans le sens horaire), on obtient un "décagone régulier à auto-intersections" Q . Démontrez que la différence entre la longueur du côté de Q et celle du côté de P est égale au rayon du cercle. [Merci à Ross Honsberger.]
101. Soit a, b, u, v , des réels non négatifs. Démontrez que si $a^5 + b^5 \leq 1$ et $u^5 + v^5 \leq 1$, alors

$$a^2 u^3 + b^2 v^3 \leq 1 .$$

[Merci à Ross Honsberger.]

102. Démontrez qu'il existe un tétraèdre $ABCD$ dont toutes les faces sont des triangles rectangles similaires ayant des angles aigus à A et B . Déterminez quelle arête est la plus longue, laquelle est la plus courte, et le rapport entre leurs longueurs.