PROBLÈMES DE SEPTEMBRE

Veuillez envoyer vos solutions à
Professeur E.J. Barbeau
Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, ON M5S 3G3
au plus tard le **31 octobre, 2001**.

Notes. Un cube (ou tétraèdre) unité est un cube (ou tétraèdre) dont tous les côtés ont longueur 1.

90. Soit m, un entier. On note $f(m)$ la plus petite valeur n pour laquelle l'énoncé suivant est vrai:

Tout ensemble de n entiers, contient un sous-ensemble de m entiers dont la somme est divisible par m.

Déterminez $f(m)$.

[*Commentaire.* On pose de nouveau ce problème, puisqu'on a reçu aucune solution jusqu'à maintenant. Pouvez-vous conjecturer la valeur de $f(m)$? Il n'est pas difficile de trouver une borne inférieure pour cette fonction. Une approche possible est d'exprimer $f(ab)$ en termes de $f(a)$ et $f(b)$, ce qui permet de réduire le problème au cas où m est premier. Cette approche donne accès à une structure qui peut aider.]

103. Trouvez une valeur du paramètre θ pour laquelle

$$f(x) \equiv \cos^2 x + \cos^2(x+\theta) - \cos x \cos(x+\theta)$$

est une fonction constante.

104. Démontrez qu'il existe exactement une suite $\{x_n\}$ d'entiers positifs telle que

$$x_1 = 1 \ , \quad x_2 > 1 \ , \qquad x_{n+1}^3 + 1 = x_n x_{n+2}$$

pour $n \geq 1$.

105. Démontrez que dans un cube unité on peut placer deux tétraèdres unités sans qu'ils ne se touchent.

106. Déterminez toutes les paires (x, y) de nombres réels positifs qui réalisent la valeur minimale de la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Déterminez cette valeur minimale.

107. Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$, des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pour quelle permutation $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ de ces nombres la valeur du produit

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{b_i} \right)$$

est-elle maximisée?

108. Déterminez toutes les fonctions à valeurs réelles $f(x)$ satisfaisant à l'équation

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

dès que $x + y \neq 0$.