44th CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
44ème OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA

1. Let x, y and z be positive real numbers. Show that $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4\,xyz - 4$.

   Soit x, y et z trois nombres réels positifs. Démontrez que $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4\,xyz - 4$.

2. For any positive integers n and k, let $L(n,k)$ be the least common multiple of the k consecutive integers $n, n+1, \ldots, n+k-1$. Show that for any integer b, there exist integers n and k such that $L(n,k) > b\,L(n+1,k)$.

   Soit $L(n,k)$ le plus petit commun multiple de la suite des k entiers consécutifs $n, n+1, \ldots, n+k-1$, où n et k sont deux entiers positifs quelconques. Montrez que pour tout entier b, il existe des nombres entiers n et k tels que $L(n,k) > b\,L(n+1,k)$.

3. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P be the point of intersection of AC and BD. Suppose that $AC + AD = BC + BD$. Prove that the internal angle bisectors of $\angle ACB$, $\angle ADB$, and $\angle APB$ meet at a common point.

   Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P le point d'intersection des droites AC et BD. Supposons que $AC + AD = BC + BD$. Démontrez que les bissectrices des angles internes de $\angle ACB$, $\angle ADB$, et $\angle APB$ se coupent en un point.

4. A number of robots are placed on the squares of a finite, rectangular grid of squares. A square can hold any number of robots. Every edge of the grid is classified as either *passable* or *impassable*. All edges on the boundary of the grid are impassable.
   You can give any of the commands *up*, *down*, *left*, or *right*. All of the robots then simultaneously try to move in the specified direction. If the edge adjacent to a robot in that direction is passable, the robot moves across the edge and into the next square. Otherwise, the robot remains on its current square. You can then give another command of *up*, *down*, *left*, or *right*, then another, for as long as you want.
   Suppose that for any individual robot, and any square on the grid, there is a finite sequence of commands that will move that robot to that square. Prove that you can also give a finite sequence of commands such that *all* of the robots end up on the same square at the same time.

   Un certain nombre de robots sont placés sur les carrés composant une grille rectangulaire de dimension finie. Chaque carré peut contenir un nombre quelconque de robots. Les bords des carrés de la grille sont classés comme *franchissable* ou *infranchissable*. Les côtés qui forment le pourtour de la grille sont infranchissables.
   Vous pouvez donner n'importe laquelle des commandes suivantes : en *haut*, en *bas*, à *gauche* ou à *droite*. Tous les robots tentent alors de se déplacer simultanément dans la direction précisée. Si le bord adjacent au carré vers lequel se déplace un robot est franchissable, le robot le franchit et se place dans le carré suivant. Sinon, le robot reste dans le carré où il se trouve. Vous pouvez ensuite lancer une autre commande de déplacement vers le *haut,* le *bas,* la *gauche* ou la *droite*, et encore une autre, aussi longtemps que vous le désirez.
   Supposons que pour chaque robot, et ce, pour n'importe quel carré, il existe une suite finie de commandes qui amèneront ce robot au carré donné. Démontrez que vous pouvez aussi lancer une suite finie de commandes de sorte que tous les robots finiront par se retrouver simultanément dans le même carré.

5. A bookshelf contains n volumes, labelled 1 to n in some order. The librarian wishes to put them in the correct order as follows. The librarian selects a volume that is too far to the right, say the volume with label k, takes it out, and inserts it so that it is in the k-th place. For example, if the bookshelf contains the volumes 1, 3, 2, 4 in that order, the librarian could take out volume 2 and place it in the second position. The books will then be in the correct order 1, 2, 3, 4.

(a) Show that if this process is repeated, then, however the librarian makes the selections, all the volumes will eventually be in the correct order.

(b) What is the largest number of steps that this process can take?

Une étagère contient n volumes étiquetés de 1 à n, rangés dans un certain ordre. Le bibliothécaire souhaite les mettre dans le bon ordre de la façon suivante : il choisit un volume qui se trouve trop à droite, par exemple le volume étiqueté k, le retire de son emplacement et l'insère à la k –ième place. Par exemple, si les volumes sont rangés dans l'ordre 1, 3, 2, 4, le bibliothécaire peut prendre le volume 2 et le mettre à la deuxième place. Les livres sont alors rangés dans le bon ordre, soit 1, 2, 3, 4.

a) Démontrez que si l'on répète ce processus, tous les volumes finiront par être dans le bon ordre, et ce, qu'elle que soit la manière dont le bibliothécaire les range.

b) Quel est le plus grand nombre d'étapes que peut exiger un tel processus?