Repêchage de qualification pour l'Olympiade mathématique du Canada 2009

Directives

- Répondez à autant de problèmes que possible, tout en présentant des solutions complètes, rédigées avec soin.
- Pour chaque problème, le numéro du problème et toutes les étapes nécessaires à sa solution doivent être clairement indiquées.
- Vous devez résoudre les problèmes seul et sans aide.
- Soumettez vos solutions complètes avant le lundi 12 janvier 2009 Vous pouvez les soumettre d'une de deux façons :
  - Tapez les solutions dans **un seul** document électronique et envoyez le document par courriel à l'adresse mathteachers@math.uwaterloo.ca.
    L'objet du courriel doit être « Repêchage de qualification OMC 2009 ».
  - Écrivez vos solutions à la main et envoyez-les par courrier régulier ou, préférablement, par service de messagerie, à l'adresse :

    Repêchage de qualification pour l'OMC
    Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
    Faculté de mathématiques, bureau MC 5104
    Université de Waterloo
    200, avenue University ouest
    Waterloo (ON) N2L 3G1
    Canada

Problèmes

1. Déterminer toutes les solutions du système d'équations :

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ x^2-y^2-z^2 &= 2 \\ x-3y^2+z &= 0 \end{aligned}$$

2. Le triangle ABC est rectangle en C. Soit $AC = b$, $BC = a$ et d la longueur de la hauteur du sommet C au côté AB. Démontrer que $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{d^2}$.

3. Démontrer qu'il n'existe aucun polynôme $f(x)$ ayant des coefficients entiers pour lequel $f(2008) = 0$ et $f(2010) = 1867$.

4. On jette trois dés justes à six faces. Déterminer la probabilité pour que la somme des nombres sur les trois faces supérieures soit égale à 6.

5. Déterminer tous les entiers strictement positifs n pour lesquels $n(n+9)$ est un carré parfait.

6. Le triangle ABC est rectangle en C. On trace un segment AQ parallèle au côté BC de manière que les points Q et B soient situés de part et d'autre du côté AC et que lorsque l'on trace le segment BQ, ce segment coupe AC au point P de sorte que $PQ = 2AB$. Démontrer que $\angle ABC = 3\angle PBC$.

7. Une feuille de papier de forme rectangulaire est pliée de manière que deux coins diagonalement opposés coïncident. Si le pli ainsi formé a la même longueur que le côté le plus long de la feuille, quel est le rapport de la longueur du grand côté de la feuille à la longueur du petit côté ?

8. Déterminer une famille infinie de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers strictement positifs, de manière que chaque quadruplet soit une solution de $a^4 + b^5 + c^6 = d^7$.

9. Soit m et k des entiers strictement positifs. Déterminer le nombre de suites $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$ qui vérifient les conditions suivantes :
   - x_i est un entier lorsque $i = 1, 2, 3, \ldots, m$,
   - $1 \leq x_i \leq k$ lorsque $i = 1, 2, 3, \ldots, m$,
   - $x_1 \neq x_m$ et
   - il n'existe aucune paire de termes consécutifs égaux.

10. Dix boîtes sont placées en cercle. Au départ, chaque boîte contient un nombre strictement positif de balles de golf. Un mouvement consiste à prendre toutes les balles de golf d'une des boîtes et à les placer dans les boîtes qui la suivent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, une balle par boîte. Démontrer que si le mouvement suivant commence toujours avec la boîte qui a reçu la dernière balle du mouvement précédent, alors après un certains nombre de mouvements, on reviendra à la distribution initiale de balles de golf dans les boîtes.