Problèmes

1. Soit a, b et x des nombres réels strictement positifs. Démontrer que $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$.

2. Deux tangentes, AT et BT, touchent un cercle aux points respectifs A et B. Les tangentes sont perpendiculaires et se coupent en T. Soit Q un point sur AT, S un point sur BT et R un point sur le cercle de manière que $QRST$ soit un rectangle et que $QT = 8$ et $ST = 9$. Déterminer le rayon du cercle.

3. Démontrer qu'il n'existe aucun nombre réel x qui vérifie les deux équations suivantes :
$$\begin{aligned} 2^x + 1 &= 2\sin x \\ 2^x - 1 &= 2\cos x \end{aligned}$$

4. Déterminer le plus petit entier strictement positif m pour lequel $m^3 - 3m^2 + 2m$ est divisible par 79 et par 83.

5. La suite de Fibonacci est définie par $f_1 = f_2 = 1$ et $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$.
Un triangle de Pythagore est un triangle rectangle dont les mesures des côtés sont toutes des entiers. Démontrer que pour chaque entier positif k $(k \geq 2)$, f_{2k+1} est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle de Pythagore.

6. Il y a 15 revues sur une table. Elles recouvrent au complet la surface de la table. Démontrer qu'il est toujours possible d'enlever 7 revues de manière que les autres revues recouvrent au moins $\frac{8}{15}$ de la surface totale de la table.

7. Étant donné un triplet (a, b, c) de nombres réels, on définit :
   - $g(a, b, c) = (a + b, b + c, c + a)$ et
   - $g^n(a, b, c) = g(g^{n-1}(a, b, c))$ $(n \geq 2)$.

   Supposons qu'il existe un entier strictement positif n de manière que $g^n(a, b, c) = (a, b, c)$ pour un triplet quelconque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Démontrer que $g^6(a, b, c) = (a, b, c)$.

8. On considère trois parallélogrammes P_1, P_2 et P_3. Le parallélogramme P_3 est situé à l'intérieur du parallélogramme P_2 et les sommets de P_3 sont situés sur les côtés de P_2. Le parallélogramme P_2 est situé à l'intérieur du parallélogramme P_1 et les sommets de P_2 sont situés sur les côtés de P_1. Les côtés de P_3 sont parallèles deux à deux aux côtés de P_1. Démontrer qu'un côté de P_3 a une longueur qui est supérieure ou égale à la moitié de la longueur du côté de P_1 qui lui est parallèle.