1. Soit une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ et définissons $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ par $h(x, y) = \text{pgcd}(f(x), f(y))$. Si $h(x, y)$ est un polynôme à deux variables en x et y, montrez que ce polynôme doit être constant.

Solution

Puisque $h > 0$, on écrit $h(x, y) = P_n(y)x^n + \cdots + P_1(y)x + P_0(y)$ où $n \geq 0$, $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ sont des polynômes et $P_n \neq 0$. Comme P_n a un nombre fini de racines, prenons $y_0 > 0$ tel que $P_n(y_0) \neq 0$. Alors pour tout x, $h(x, y_0) = \gcd(f(x), f(y_0)) \mid f(y_0)$, donc $h(x, y_0) \leq f(y_0)$ pour tout x.

Lorsque $x \to \infty$, $h(x, y_0) \to P_n(y_0)x^n$. Puisque $P_n(y_0)$ est constant et que $h(x, y_0)$ est borné (en dessous par 0 au dessus par $f(y_0)$), il est impossible que $n \geq 1$. Ainsi $n = 0$ et $h(x, y) = P_0(y)$.

La plus grande puissance de x est donc x^0, i.e. $h(x, y)$ ne dépend pas de x. Mais il est possible d'inverser x et y pour obtenir un résultat analogue, soit que $h(x, y)$ ne dépend pas de y. Le polynôme est donc constant.

2. Alphonse et Brigitte jouent à un jeux avec n coffres forts et n clés. Chaque coffre peut être ouvert par une unique clé et chaque clé ouvre exactement un des coffres. Brigitte mélange aléatoirement les n clés et en place une dans chaque avant de tous les barrer avec sa clé maîtresse. Alphonse choisit ensuite m coffres ($m < n$) et Brigitte utilise sa clé maîtresse pour les ouvrir. Alphonse prend les clés contenues dans les m coffres et les utilise pour ouvrir les $n-m$ coffres restants. S'il est capable d'ouvrir un coffre avec une des m clés, il peut utiliser la clé ainsi trouvée pour ouvrir les autres coffres et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait ouvert tous les coffres ou qu'il ne soit plus capable d'en ouvrir un de plus. Notons $P_m(n)$ la probabilité qu'Alphonse puisse éventuellement ouvrir les n coffres en débutant avec sa sélection de m clés.

(a) Montrez que $P_2(3) = \frac{2}{3}$.

(b) Montrez que $P_1(n) = \frac{1}{n}$.

(c) Pour tous les entiers $n \geq 2$, montrez que

$$P_2(n) = \frac{2}{n} \cdot P_1(n-1) + \frac{n-2}{n} \cdot P_2(n-1).$$

(d) Trouvez une formule pour $P_2(n)$.

Solution

(a) Les trois coffres peuvent être ouverts si la clé du troisième coffre se trouve dans les deux coffres choisis par Alphonse. Cet évènement se réalise avec probabilité $\frac{2}{3}$.

(b) Avec une seule clé au départ, on peut ouvrir tous les coffres si et seulement si il est possible d'ordonner les coffres comme $s_1, s_2, \ldots, s_n$, où la clé dans le coffre s_i ouvre le coffre s_{i+1} pour tout i. Il y a $(n-1)!$ configurations de clés qui ont une telle propriété. Il y a $n!$ configurations de clés au total, donc $P_1(n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

(c) Considérons la clé dans le premier coffre choisi (sur les deux). Avec probabilité $\frac{2}{n}$, cette clé ouvre un des deux coffres sélectionnés au départ. Dans ce cas, il y a une probabilité $P_1(n-1)$ de pouvoir ouvrir les coffres restants. Avec probabilité $\frac{n-2}{n}$ la clé ouvre un des $n-2$ autres coffres. Dans ce cas, il y a une probabilité $P_2(n-1)$ de pouvoir ouvrir les autres coffres. Ainsi $P_2(n) = \frac{2}{n} P_1(n-1) + \frac{n-2}{n} P_2(n-1)$.

(d) $P_2(n) = \frac{2}{n}$, qui peut facilement être montré par induction avec la partie (c).

3. Soit $1000 \leq n = \mathrm{ABCD}_{10} \leq 9999$ un entier positif dont l'écriture ABCD satisfait la condition de divisibilité suivante:
$$1111 \mid (\mathrm{ABCD} + \mathrm{AB} \times \mathrm{CD}).$$
Trouvez la plus petite valeur possible pour n.

Solution

On définit les entiers $n = \mathrm{ABCD}$, $x = \mathrm{AB}$ et $y = \mathrm{CD}$. Alors $n = 100x + y$, est le nombre qui nous intéresse. La condition que n a quatre chiffres dans son écriture décimale peut être écrite $1000 \leq n \leq 9999$, ce qui est équivalent à $10 \leq x \leq 99$ et $0 \leq y \leq 99$.

En additionnant 100 à la condition (3) on trouve la condition équivalente

$$100 + n + xy = (x+1)(y+100) = 100 + 1111z \tag{1}$$

pour un certain entier z.

Si $x = 10$, alors on aurait $11|100 + 1111z$, ce qui est impossible. Ainsi $x \geq 11$ et $(x+1) \geq 12$. Comme $n > 0$ et $x, y \geq 0$, on trouve que $1111z = n + xy > 0$ et donc $z > 0$.

Supposons que $z = 1$. Dans ce cas, $(x+1)(y+100) = 1211$ et ainsi $x+1 = 1211/(y+100) \leq 1211/100 = 12.11$. Puisque $x+1$ est entier, on doit avoir $(x+1) \leq 12$ par ce qui précède, $(x+1) \geq 12$ donc $x+1 = 12$. Mais 12 n'est pas un diviseur de 1211, contredisant la condition (1) et la supposition $z = 1$. Donc $z \geq 2$.

Supposons que $z = 2$. La partie droite de la condition (1) devient $100 + 1111z = 2322$. C'est un nombre pair.En divisant par deux on trouve 1161. La somme de ses décimales est 9 donc il est divisible par 3, la division donne 387. Ceci est encore divisible par 3, donnant 129 qui est un facteur de 2322, soit $2322/(2 \times 3 \times 3)$. Comme 129 est entre 100 et 199, on tente $y + 100$ comme candidat. L'autre facteur $2 \times 3 \times 3 = 18$ peut servir pour $x + 1$ et se situe dans le bon intervalle. Ceci donne une solution satisfaisant (1) avec $x = 17$, $y = 29$ et $n = 1729$.

Supposons maintenant qu'il existe une solution $n < 1729$ à la condition (1). Si $x > 17$, alors $n > 1729$, une contradiction. Si $x = 17$, alors $z \geq 2$ donne $100 + 1111z \geq 2322$, ainsi $y \geq 29$ et $n \geq 1729$, une contradiction. Donc $x < 17$.

En remplaçant $(x+1) \leq 17$ dans la condition (1) on trouve $100 + 1111z = (x+1)(y+100) \leq 17 \times 199 = 3383$. Il suit que $z \leq 3283/1111 < 3$. Ainsi $z = 2$ puisque $z \geq 2$ a été montré plus tôt.

Ainsi $100 + 1111z = 2322$, dont la factorisation débutée plus tôt, peut être complétée comme suit:
$$2322 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 43. \tag{2}$$
Le nombre $x+1$ appartient à l'ensemble $\{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ à cause des bornes $12 \leq (x+1) \leq 17$ établies plus tôt. Chaque nombre dans cet ensemble est divisible par 4 ou par un premier strictement entre 3 et 43 et ne peux donc pas diviser 2322, une contradiction.

4. Dans $\triangle ABC$, l'intérieur des côtés est fait de miroirs et un laser est placé au point A_1 sur le côté BC. Un rayon laser émane de A_1, frappe le côté AC au point B_1 et est réfléchi. (À chaque fois que le rayon laser frappe un miroir, l'angle d'incidence est égal à l'angle réfléchi). Le laser frappe ensuite AB au point C_1, le côté BC au point A_2, le côté AC au point B_2, le côté AB au point C_2, le côté BC au point A_3 et le côté AC au point B_3.

   (a) Montrez que $\angle B_3A_3C = \angle B_1A_1C$.

   (b) Montrer qu'un tel laser existe si et seulement si $\triangle ABC$ sont tous inférieurs à 90°.

   Solution

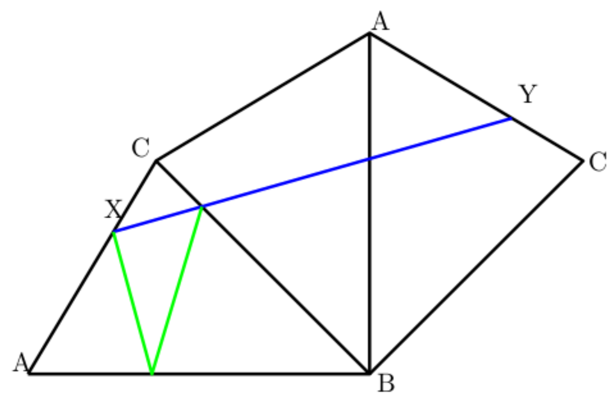
   (a) Soit $a = \angle A, b = \angle B, c = \angle C, \alpha = \angle B_1A_1C$.

$$
\begin{array}{lcll}
\angle AB_1C_1 & = & \alpha & (1) \\
\angle AC_1B_1 & = & \pi - a - \alpha & (2) \\
\angle BC_1A_2 & = & \pi - a - \alpha & \\
\angle BA_2C_1 & = & a + \alpha - b & (3) \\
\angle CA_2B_2 & = & a + \alpha - b & \\
\angle CB_2A_2 & = & \pi - c - a + b - \alpha & (4) \\
\angle AB_2C_3 & = & \pi - c - a + b - \alpha & \\
\angle AC_3B_2 & = & c - b + \alpha & (5) \\
\angle BC_3A_3 & = & c - b + \alpha & \\
\angle BA_3C_3 & = & \pi - c - \alpha & (6) \\
\angle CA_3B_3 & = & \pi - c - \alpha & \\
\angle CB_3A_3 & = & \alpha &
\end{array}
$$

   (b) Si l'angle d'incidence du laser avec le côté est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ alors le laser rebondira du même côté qu'il provient. Ainsi, pour qu'un tel laser existe, tous les angles du côté droit des équations doivent être inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

   En observant les lignes (1) et (4), on a que $\pi - c - a + b < \pi$, ce qui donne $b < c + a$. De la même façon, on trouve $c < a + b$ des lignes (2) et (5), et $a < b + c$ des lignes (3) et (6). Ceci nous indique que les angles du triangle $\triangle ABC$ sont inférieurs à 90°.

   Pour voir que si tous les angles sont inférieurs à 90° alors un tel laser existe, on prend 3 copies de $\triangle ABC$ comme montré dans la figure plus bas. On choisit un point X sur le côté AC et on appelle Y, le même point dans la dernière copie du triangle. La ligne droite entre ces deux points nous donne trois segments dans $\triangle ABC$ qui nous donnent un laser.


A
Y
C
C
X
A
B

5. Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$.

   (a) Montrez que $f(x)$ ne peut être écrit comme un produit de deux polynômes non constants à coefficients entiers.

   (b) Trouvez la valeur exacte des quatre racines de $f(x)$.

Solution

(a) Si $f(x)$ n'était pas irréductible, il serait possible de le factoriser comme un produit de deux polynômes quadratiques ou d'un linéaire et un cubique. Dans le cas des facteurs linéaires et cubiques, ceci implique que le polynôme ait une racine (rationnelle car coefficients entiers). On utilise le test des racines rationnelles et on trouve $f(\pm 1) \neq 0$ alors cette factorisation est impossible. Ainsi, supposons $f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ où a, b, c, d sont entiers. Alors:

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd \; a + c = 2;$$
$$b + d + ac = 0; \; ad + bc = -1; \; bd = -1$$

De $bd = -1$ on trouve que $b = 1$,$d = -1$ ou $b = -1$,$d = 1$. Dans les deux cas $b + d = 0$ donc $0 = b + d + ac = ac$ alors $a = 0$ ou $c = 0$. Mais $a + c = 2$ donc $a = 0$,$c = 2$ ou $a = 2$,$c = 0$. Mais alors $2 \mid a, c$ donc $2 \mid ad + bc = -1$, ce qui est une contradiction. Ainsi $f(x)$ est irréductible comme affirmé.

(b) Remarquons que $f(x-1) = x^4 - 2x^3 + x - 1$, donc $f(x) = f(-x-1)$ et ainsi $f(x - 1/2) = f(-x - 1/2)$. Ceci nous encourage à étudier $g(x) = f(x - 1/2) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{16}$; c'est un polynôme quadratique en x^2! Les racines de $g(x)$ satisfont $x^2 = \frac{3/2 \pm \sqrt{(-3/2)^2 + 4(9/16)}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{4}$. Ainsi $g(x)$ a pour racines $\pm\sqrt{\frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{4}}$ et en utilisant $0 = g(x) = f(x-1/2)$ on remarque que les 4 racines de $f(x)$ sont $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{4}}$.

6. Étant donné un triangle A, B, C, X sur le côté AB, Y sur le côté AC, et P et Q sur le côté BC de façon à ce que $AX = AY$, $BX = BP$ et $CY = CQ$. Supposons que XP et YQ se croisent en T. Montrez que AT passe par le point milieu de PQ.

   Solution

   Soit M, le point d'intersection de AT et BC. Soit R, S respectivement sur les côtés AB, AC tel que $MR||XP$ et $MS||YQ$. Puisque $BX = BP$, $BR = BM$. Ainsi, $XR = PT$. De la même façon, $YS = QT$. On doit montrer que $PT = QT$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $XR = YS$.

   Comme $RM||XT$ et $SM||YT$, $\frac{AR}{AX} = \frac{AM}{AT} = \frac{AS}{AY}$. Puisque $AX = AY$, $AR = AS$. Donc $RX = SY$.

7. Un insecte est situé à chaque sommet de l'hexagone régulier $ABCDEF$. À un instant précis, chaque insecte choisit un sommet de l'hexagone sur lequel il n'est pas et commence à avancer vers ce sommet. Chaque insecte voyage en ligne droite du sommet qu'il occupe vers le sommet choisi. Chaque insecte bouge à la même vitesse et est d'une grosseur négligeable. Une fois arrivés à leur objectif, les insectes arrêtent de bouger. De combien de façon différentes les insectes peuvent-ils bouger de façon à ce que deux insectes ne se trouvent jamais au même endroit au même moment?

Solution

On donne les étiquettes $0, 1, 2, 3, 4, 5$ aux sommets de l'hexagone (en ordre en tournant autour de l'hexagone, on fera des calculs en modulo 6 i.e 3+3=0, 0-1=5) et on écrit b_i pour l'insecte qui débute au sommet i. On a les restrictions suivantes pour les insectes:

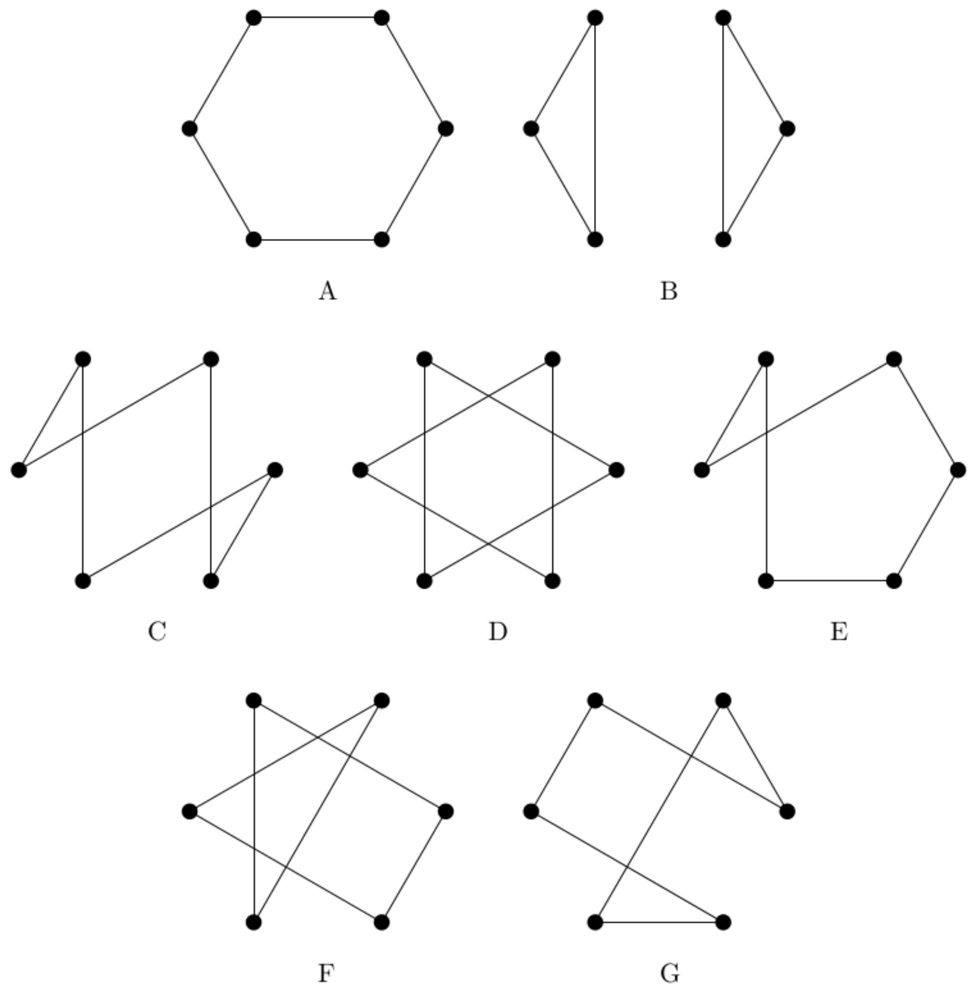
1. Deux insectes ne peuvent se diriger vers le même sommet car ils seraient au même endroit une fois à destination.
2. Si b_i se dirige vers le sommet $i+3$ alors pour $j \neq i$ l'insecte b_j ne va pas au sommet $j+3$.
3. Si l'insecte b_i va au sommet b_{i+2} alors b_{i+1} ne peut aller au sommet b_{i-1}.
4. Si l'insecte b_i va au sommet b_{i-2} alors l'insecte b_{i-3} ne peut aller au sommet b_{i-1}.

La première condition nous dit que le mouvement des insectes peut être décrit par une permutation des chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Les trois autres conditions donnent des critères sur la permutation pour s'assurer qu'il n'y ait aucune collision entre les insectes et que la permutation soit valide.

On fait la liste des permutations qui vont fonctionner. Celles-ci sont illustrées plus bas.

- A Il y a 2 permutations de cette forme. Celles-ci correspondent aux deux choix de direction pour le cycle.
- B Il y a 12 permutations de cette forme. Il y a trois choix pour les paires d'ensembles de trois sommets et 2 choix pour la direction de chaque cycle.
- C Il y a 6 permutations de cette forme. Celles-ci correspondent aux trois rotations et aux deux choix de direction.
- D Il y a 2 permutations de cette forme. Il y a deux choix de direction pour un des cycles mais l'autre cycle doit avoir la même direction.
- E Il y a 12 permutations de cette forme. Il y a deux choix de direction et 6 rotations possibles.
- F Il y a 12 permutations de cette forme. Il y a deux choix de direction et 6 rotations possibles.
- G Il y a 12 permutations de cette forme. Il y a deux choix de direction et 6 rotations possibles.

Ceci donne un total de $2 + 12 + 6 + 2 + 12 + 12 + 12 = 56$ possibilités.


A
B
C
D
E
F
G

8. Étant donné un entier positif m, on définit $f(m)$ comme le nombre de 1 dans sa représentation en base 2. Soit n un entier strictement positif. Montrez que l'entier

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} \left((-1)^{f(m)} \cdot 2^m\right)$$

possède au moins $n!$ diviseurs positifs.

Solution

Remarquons que chaque entier de 0 à $2^n - 1$ (inclusivement) peut être écrit de façon unique comme la somme d'éléments de l'ensemble $\{2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}\}$. Par la définition de $f(m)$, la sommation dans l'énoncé du problème vaut

$$(-1)^n \cdot (2^{2^0} - 1)(2^{2^1} - 1)(2^{2^2} - 1) \cdots (2^{2^{n-1}} - 1).$$

Remarquons que pour chaque $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$,

$$2^{2^k} - 1 = (2^{2^1} - 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{k-1}} + 1) = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{k-1}} + 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & (-1)^n \cdot (2^{2^0} - 1)(2^{2^1} - 1)(2^{2^2} - 1) \cdots (2^{2^{n-1}} - 1) \\ = \; & (-1)^n (2^{2^0} + 1)^{n-1} (2^{2^1} + 1)^{n-2} \cdots (2^{2^{n-2}} + 1)^2 (2^{2^{n-1}} + 1). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que ce terme a au moins $n!$ diviseurs positifs. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que les $n-1$ facteurs écrits plus haut sont copremiers deux à deux. Ceci est vrai puisque $(-1)^n(2^{2^0} + 1)^{n-1}(2^{2^1} + 1)^{n-2} \cdots (2^{2^{n-2}} + 1)^2(2^{2^{n-1}} + 1)$ a un facteur de la forme $p_1^{n-1} p_2^{n-2} \ldots p_{n-1}^2 p_n$ où $p_1, \ldots, p_n$ sont des premiers deux à deux distincts. Ce facteur a $n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 = n!$ diviseurs positifs, ce qui veut dire que $(-1)^n(2^{2^0}+1)^{n-1}(2^{2^1} + 1)^{n-2} \cdots (2^{2^{n-2}} + 1)^2(2^{2^{n-1}} + 1)$ a $n!$ diviseurs positifs. Ceci complète le problème.

Il suffit de montrer que pour toutes les paires d'entiers positifs a, b satisfaisant $a \neq b$, on a $\text{pgcd}(2^{2^a} + 1, 2^{2^b} + 1) = 1$. Sans perte de généralité, supposons que $a < b$. On remarque que $(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \cdots (2^{2^{b-1}} + 1) = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{2^b - 1} = 2^{2^b} - 1 = (2^{2^b} + 1) - 2$. Supposons ensuite que $\text{pgcd}(2^{2^a} + 1, 2^{2^b} + 1) > 1$. Soit p un nombre premier qui divise à la fois $2^{2^a} + 1$ et $2^{2^b} + 1$. Alors p divise 2. Ainsi, $p = 2$. Mais ceci est impossible puisque $2^{2^a} + 1$ est impair. Donc $\text{pgcd}(2^{2^a} + 1, 2^{2^b} + 1) = 1$, ce qui conclue la solution.