Problèmes

1. Trouvez toutes les solutions entières à l'équation $7x^2y^2 + 4x^2 = 77y^2 + 1260$.

2. Un polynôme à coefficients entiers $f(x)$ est dit *tri-divisible* si 3 divise $f(k)$ pour tout entier k. Trouvez des conditions nécessaires et suffisantes à ce qu'un polynôme soit tri-divisible.

3. Soit N un nombre à 3 chiffres dont tous les chiffres sont distincts et non nuls. On dit que N est *médiocre* s'il a la propriété suivante: la moyenne des nombres issus des six permutations des 3 chiffres de N vaut N. Par exemple, $N = 481$ est médiocre puisque la moyenne des nombres de l'ensemble $\{418, 481, 148, 184, 814, 841\}$ est 481.

   Trouvez le plus grand nombre médiocre.

4. Étant donné un triangle aigu ABC dont les hauteurs passant par B et C se croisent en H, on pose P un point sur le côté BC ainsi que X et Y des points respectivement sur AB et AC de façon à ce que $PB = PX$ et $PC = PY$. Montrez que A, H, X et Y se trouvent sur un cercle commun.

5. Soit x et y des nombres réels positifs tels que $x + y = 1$. Montrez que

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{y}\right)^2 \geq 18.$$

6. Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle dont $\angle A = 90°$ et $AB < AC$. Les points D, E et F sont situés sur le côté BC de façon à ce que AD soit la hauteur, AE soit la bissectrice de l'angle interne et AF soit la médiane.

   Montrez que $3AD + AF > 4AE$.

7. Une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$ est une séquence ternaire infinie telle que:

   - S'il y a un 0 à la position i, alors il y a un 1 à la position $i + x$.
   - S'il y a un 1 à la position j alors il y a un 2 à la position $j + y$.
   - S'il y a un 2 à la position k alors il y a un 0 à la position $k + z$.

   Pour combien de triplets ordonnés (x, y, z) avec $x, y, z \leq 100$ existe-t-il une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$?

8. Un château magique possède n pièces identiques et chacune d'elles contient k portes placées en ligne. Dans la pièce i, $1 \leq i \leq n - 1$, il y a une porte qui mène à la pièce $i + 1$ et dans la pièce n, il y a une porte qui mène hors du château. Toutes les autres portes mènent à la pièce 1. Lorsque vous empruntez une porte pour changer de pièce, il vous est impossible de savoir dans quelle pièce vous entrez, ni de savoir quelles portes vous avez préalablement empruntées. Vous débutez dans la pièce 1 et êtes en connaissance des nombres n et k. Déterminez pour quelles valeurs de n et k il existe une stratégie pour sortir du château à tout coup. Expliquez cette stratégie et montrez qu'elle fonctionne.