1. Trouvez toutes les solutions entières à l'équation $7x^2y^2 + 4x^2 = 77y^2 + 1260$.

   Solution: On remarque que tous les coefficients sont divisibles par 7 à l'exception du 4, ce qui implique que x doit être divisible par 7.

   En repositionnant les termes et en factorisant l'expression, on en arrive à l'écriture suivante:

$$(x^2 - 11)(7y^2 + 4) = 1216.$$

   Si $y = 0$, alors $x^2 = 315$ et il n'y a aucune solution. Ainsi, $y^2 \geq 1$. On peut réécrire l'équation comme

$$\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{1216}{7y^2+4} + 11 \\ &\leq \tfrac{1216}{11} + 11 \\ &< 122 \end{aligned}$$

   Puisque x est un multiple de 7, nous avons seulement $x = 0, \pm 7$ comme solutions possibles. Lorsque $x = \pm 7$, on trouve $y = \pm 2$ et lorsque $x = 0$ il n'y a aucune solution.

   Il y a donc quatre solutions possibles et celles-ci sont de la forme $(\pm 7, \pm 2)$.

2. Un polynôme à coefficients entiers $f(x)$ est dit *tri-divisible* si 3 divise $f(k)$ pour tout entier k. Trouvez des conditions nécessaires et suffisantes à ce qu'un polynôme soit tri-divisible.

Solution:

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et supposons que $f(x)$ est tri-divisible. Alors $f(0), f(1),$ et $f(-1)$ sont tous divisibles par 3.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 & \equiv 0 \pmod 3 \\ f(1) &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n & \equiv 0 \pmod 3 \\ f(-1) &= a_0 - a_1 + \cdots \pm a_n & \equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

Si on additionne les 3 équivalences et qu'on divise par 2, on trouve $a_2 + a_4 + \cdots \equiv 0 \pmod 3$.

En soustrayant la deuxième équivalence de la troisième, on obtient $a_1 + a_3 + \cdots \equiv 0 \pmod 3$.

Ainsi, si $f(x)$ est tri-divisible, il est nécessaire que le terme constant, la somme des coefficients des puissances impaires de x et la somme des coefficients des puissances paires mais non nulles de x soient divisibles par 3. On appellera polynôme *joyeux* n'importe quel polynôme qui satisfait ces trois conditions. On montrera que le fait d'être joyeux est suffisant pour être tri-divisible.

Prenons $f(x)$ un polynôme joyeux et n un entier.

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$ alors $f(n) \equiv a_0 \equiv 0 \pmod 3$.
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$ alors $f(n) \equiv a_0 + (a_2 + a_4 + \cdots) + (a_1 + a_3 + \cdots) \equiv 0 \pmod 3$.
- Si $n \equiv -1 \pmod 3$ alors $f(x) \equiv a_0 + (a_2 + a_4 + \cdots) + (-a_1 - a_3 - \cdots) \equiv 0 \pmod 3$.

Le polynôme $f(x)$ est tri-divisible. Les conditions sont donc à la fois nécessaires et suffisantes.

3. Soit N un nombre à 3 chiffres dont tous les chiffres sont distincts et non nuls. On dit que N est *médiocre* s'il a la propriété suivante: la moyenne des nombres issus des six permutations des 3 chiffres de N vaut N. Par exemple, $N = 481$ est médiocre puisque la moyenne des nombres de l'ensemble $\{418, 481, 148, 184, 814, 841\}$ est 481.

   Trouvez le plus grand nombre médiocre.

   Solution:

   Prenons abc un nombre médiocre. Ses 6 permutations sont $\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$. La somme de ces nombres est $222(a + b + c)$ et la moyenne est $37(a + b + c)$. Puisque abc est médiocre, on a $100a + 10b + c = 37(a + b + c)$.

   On réarrange l'équation pour trouver $63a = 27b + 36c$. Remarquons que comme $63 = 27 + 36$, a doit se situer entre b et c. Ainsi, $a \neq 9$.

   On remarque que si $b = a + 1$ alors on a $36a = 27 + 36c$ qui ne possède pas de solution entière, et si $c = a + 1$ alors on a $27a = 27b + 36$ qui n'a pas non plus de solution entière. Puisque a est strictement entre b et c, si $a = 8$ alors b ou c doit valoir 9 mais ceci est impossible par ce qui a été fait plus haut. Ainsi, $a \neq 8$.

   Si $a = 7$ alors soit $b = 9$ ou $c = 9$. Ceci nous mène à l'équation $441 = 243 + 36c$ ou $441 = 27b + 324$. Aucune de celles-ci n'a de solution entière, donc $a \neq 7$.

   Si $a = 6$ alors on a $378 = 27b + 36c$ ce qui peut être réduit à $42 = 3b + 4c$. On trouve $b = 14 - \frac{4}{3}c$. Pour obtenir des solutions entières, on doit se réduire à $c = 3, 6,$ or 9 ce qui nous donne respectivement $b = 10, 6,$ and 2. Les deux premiers cas ne mènent pas à des solutions valides puisque 10 n'est pas un chiffre et que 666 n'est pas médiocre. Ainsi, le plus grand nombre médiocre est 629.

4. Étant donné un triangle aigu ABC dont les hauteurs passant par B et C se croisent en H, on pose P un point sur le côté BC ainsi que X et Y des points respectivement sur AB et AC de façon à ce que $PB = PX$ et $PC = PY$. Montrez que A, H, X et Y se trouvent sur un cercle commun.

Solution:

Soit E sur AC de façon à ce que $AC \perp BE$ et F sur AB tel que $AB \perp CF$. L'énoncé du problème nous dit que BE et CF se croisent en H. Soit M, N respectivement les points milieu de BX et CY. Alors $PM \perp AB$ et $PN \perp AC$. De plus, $PM||CF$ et $PN||BE$. Ainsi $BP/BC = BM/BF$ et $CP/CB = CN/CE$. Donc

$$\frac{BM}{BF} + \frac{CN}{CE} = \frac{BP}{BC} + \frac{CP}{CB} = 1.$$

On a ensuite

$$\frac{BX}{BF} + \frac{CY}{CE} = 2.$$

Ainsi, il existe un nombre réel r tel que

$$\frac{BX}{BF} = 1 + r, \quad \frac{CY}{CE} = 1 - r.$$

Par symétrie, on peut supposer $r \geq 0$. Donc X est sur la droite BF dépassé F et Y est sur le segment CE.

Pour montrer que A, H, X et Y sont sur le même cercle, il suffit de montrer que $\angle FXH = \angle EYH$. Puisque $\angle XFH = \angle YEH = 90°$, on doit montrer que $XF/FH = YE/EH$.

Comme $BX/BF = 1 + r, r = (BX - BF)/BF = XF/BF$. De la même façon, $r = YE/CE$. Ainsi,

$$XF/BF = YE/CE \tag{1}$$

On remarque aussi que $\angle FBH = \angle ABE = 90 - \angle BAC = \angle ACF = \angle ECH$. Ainsi,

$$HF/BF = HE/CE. \tag{2}$$

En divisant (1) par (2), on trouve $XF/FH = YE/EH$.

5. Soit x et y des nombres réels positifs tels que $x+y=1$. Montrez que

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+\left(\frac{y+1}{y}\right)^2 \geq 18.$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{x+1}{x}\right)^2+\left(\tfrac{y+1}{y}\right)^2 &= \left(\tfrac{x+1}{x}\right)^2+\left(\tfrac{2-x}{1-x}\right)^2 && (y=1-x)\\
&\geq 2\left(\tfrac{x+1}{x}\right)\left(\tfrac{2-x}{1-x}\right) && (\text{moyenne arithmétique et géométrique})\\
&= 2\left(\tfrac{2+x-x^2}{x(1-x)}\right)\\
&= 2\left(\tfrac{2+x-x^2}{x(1-x)}-9+9\right)\\
&= 2\left(\tfrac{2+x-x^2-9x+9x^2}{x(1-x)}+9\right)\\
&= 2\left(\tfrac{8x^2-8x+2}{x(1-x)}\right)+18\\
&= 4\tfrac{(2x-1)^2}{x(1-x)}+18\\
&\geq 18
\end{aligned}$$

6. Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle dont $\angle A = 90°$ et $AB < AC$. Les points D, E et F sont situés sur le côté BC de façon à ce que AD soit la hauteur, AE soit la bissectrice de l'angle interne et AF soit la médiane.

   Montrez que $3AD + AF > 4AE$.

   Solution:

   On peut multiplier la longueur des côtés du triangle par une constante sans changer le fait que l'inégalité soit vraie ou fausse. Sans perte de généralité, on prend donc pour acquis que le côté AC a longueur 1. Soit c la longueur du côté AB et a la longueur du côté BC Par le théorème de Pythagore, $BC = \sqrt{1+a^2}$.

   Puisque AD est une hauteur, $AD \cdot BC = AB \cdot AC$, donc $AD = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

   Puisque AF est la médiane et que ABC est rectangle en A, $AF = BF = CF = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}$.

   Comme AE est la bissectrice de l'angle, on a que $\frac{BF}{CF} = \frac{BA}{CA}$, ce qui nous donne que $BF = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $CF = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. On trace des perpendiculaires à AB et AC passant par F et on note respectivement les intersections avec les segments par G et H. Puisque AE est la bissectice d'un angle droit, les deux perpendiculaires ont la même longueur. On note cette longeur par x. Par un argument de triangles semblables, $\frac{1-x}{x} = \frac{HC}{GF} = \frac{CF}{BF} = \frac{1}{a}$. En résolvant pour trouver x, on obtient $x = \frac{a}{1+a}$ et donc $AF = \frac{\sqrt{2}a}{1+a}$.

   On veut donc montrer l'inégalité $\frac{3a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} > \frac{4\sqrt{2}a}{1+a}$.

   Comme a est positif et n'est pas égal à 1, les inégalités suivantes sont vraies:

$$\begin{array}{lrl}
 & (a-1)^4(a^2+18a+1) & > 0 \\
\Leftrightarrow & a^6 + 14a^6 - 65a^4 + 100a^3 + 63a^2 + 14a + 1 & > 0 \\
\Leftrightarrow & a^6 + 14a^5 + 63a^4 + 100a^3 + 63a^2 + 14a + 1 & > 128a^4 + 128a^2 \\
\Leftrightarrow & (a^2+6a+1)^2(a+1)^2 & > 128a^2(a^2+1) \\
\Leftrightarrow & \frac{(a^2+6a+1)^2}{a^2+1} & > \frac{128a^2}{(a+1)^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{a^2+6a+1}{\sqrt{a^2+1}} & > \frac{8\sqrt{2}a}{a+1} \\
\Leftrightarrow & \frac{6a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} & > \frac{8\sqrt{2}a}{a+1} \\
\Leftrightarrow & \frac{3a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} & > \frac{4\sqrt{2}a}{1+a}
\end{array}$$

   On a donc montré l'inégalité désirée.

7. Une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$ est une séquence ternaire infinie telle que:

   - S'il y a un 0 à la position i, alors il y a un 1 à la position $i + x$.
   - S'il y a un 1 à la position j alors il y a un 2 à la position $j + y$.
   - S'il y a un 2 à la position k alors il y a un 0 à la position $k + z$.

   Pour combien de triplets ordonnés (x, y, z) avec $x, y, z \leq 100$ existe-t-il une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$?

   Solution:

   Il est clair que toute séquence $(0_x, 1_y, 2_x)$ doit contenir au moins un des trois chiffres. Supposons qu'il y a un 0 à la position n. Il y a donc un 1 à la position $n + x$, un 2 à la position $n + x + y$ et un 0 à la position $n + x + y + z$. Il est aussi vrai que le chiffre à la position k est le même que celui à la position $k + x + y + z$ pour tout k et tout chiffre. On remarque de plus que si on connait le chiffre à la position $n + x + y + z$, alors celui à la position n est le même.

   Étant donné un bloc de $x + y + z$ chiffres consécutifs dans la suite, on affirme que le nombre de 0, de 1 et de 2 dans ce bloc doit être semblable. On remarque que tout bloc de $x + y + z$ chiffres consécutifs dans la suite est identique à un réarrangement cyclique près. Étant donné n'importe quel 0 dans le bloc, il y a un 1 qui le suit x positions plus tard (en reccomençant au début lorsqu'on termine le bloc) et un 2 qui le suit $x + y$ positions plus tard. Pour deux 0 distincts dans le bloc, les 1 et les 2 correspondants sont différents. Ainsi, il y a au moins autant de 1 et de 2 qu'il y a de 0 dans le bloc. Un argument semblable nous montre qu'il y a autant de 0, de 1 et de 2 dans le bloc. On sait donc que $x + y + z$ doit être divisible par 3.

   On affirme que pour tout entier k, il existe un séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$ si et seulement si il existe une séquence $(0_{kx}, 1_{ky}, 2_{kz})$. Étant donné une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$, on peut créer une séquence $(0_{kx}, 1_{ky}, 2_{kz})$ en répétant chaque chiffre k fois. Étant donné une séquence $(0_{kx}, 1_{ky}, 2_{kz})$, on peur créer une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$ en sélectionnant les chiffres par bonds de k dans la séquence.

   Pour commencer, supposons que $3 \not| \gcd(x, y, z)$. Alors puisque $x + y + z = 0$ on a soit $x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv y \equiv z \equiv 2 \pmod 3$ ou que (x, y, z) sont équivalents à $(0, 1, 2)$ dans un ordre quelconque.

   Analysons les séquences $S_1 = 012012\cdots$ et $S_2 = 021021\cdots$. On remarque que si $x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod 3$ alors S_1 est une séquence $(0_x, 1_y, 2_z)$ et que si $x \equiv y \equiv z \equiv 2 \pmod 3$ alors S_2 en est une.

   Par l'affirmation du dernier paragraphe, si $x \equiv y \equiv z \equiv 3 \text{ or } 6 \pmod 9$ alors une telle séquence existe aussi. On peut procéder de même lorsque tous les chiffres sont équivalents à 9 ou $18 \pmod{27}$, lorsqu'ils sont équivalents à 27 ou $54 \pmod{81}$ ou à $81 \pmod{243}$.

   On compte le nombre de possibilités de triplets:

x y z	mod	nombre de possibilités
1	3	$34^3 = 39304$
2	3	$33^3 = 35937$
3	9	$11^3 = 1331$
6	9	$11^3 = 1331$
9	27	$4^3 = 64$
18	27	$4^3 = 64$
27	81	$1^3 = 1$
54	81	$1^3 = 1$
81	243	$1^3 = 1$

Le total est $39304 + 35937 + 1331 + 1331 + 64 + 64 + 1 + 1 + 1 = 78034$.

On affirme que lorsque x, y, z sont équivalents à $0, 1, 2 \pmod 3$ dans un certain ordre, il n'y a aucune séquence possible. Sans perte de généralité, supposons que $x < y$ et on choisit une position k où la suite est 0. Il y a donc un 1 à la position $k+x$ et un 2 à la position $k+x+y$. On pose M comme le terme de la suite à la position $k+2x+y$. M ne peut être 1 puisque le nombre en $k+x+y$ serait un 0. D'un autre côté, M ne peut pas être 2 puisque le nombre à la position $k+x$ devrait être un 1. Ainsi, $M = 1$. Par induction, on remarque que pour tout entier positif i, le nombre en position $k + i(2x+y)$ est 1.

On peut aussi montrer que le nombre en position $x + y$ doit être un 1. Ainsi, le nombre à la position $k + y - x$ doit être un 1. On obtient alors que pour tout entier positif j, le nombre à la position $k + j(y - x)$ doit être un 1.

Comme $x \neq y \pmod 3$, $2x + y$ n'est pas un multiple de 3. Ainsi, on sait que $\mathrm{PGCD(2x+y, y-x)} = \mathrm{PGCD(2x+y, 3x)}$ qui doit être un facteur de x. Il existe alors de entiers positifs r et s tels que $r(2x+y) - s(y-x) = x$. Les nombres aux positions $k + r(2x+y)$ et $k + s(y-x)$ doivent tous deux valoir 1 par les résultats précédents. Par contre, ces positions sont séparées par une distance de x, donc si un zéro occuppe la position $k + s(y - x)$, un 1 doit être en $k+r(2x+y)$. Il ne peut donc pas exister de solution si x, y, z sont équivalents à $0, 1, 2 \pmod 3$ dans un certain ordre.

Il y a donc 78034 triplets possibles.

8. Un château magique possède n pièces identiques et chacune d'elles contient k portes placées en ligne. Dans la pièce i, $1 \leq i \leq n-1$, il y a une porte qui mène à la pièce $i+1$ et dans la pièce n, il y a une porte qui mène hors du château. Toutes les autres portes mènent à la pièce 1. Lorsque vous empruntez une porte pour changer de pièce, il vous est impossible de savoir dans quelle pièce vous entrez, ni de savoir quelles portes vous avez préalablement empruntées. Vous débutez dans la pièce 1 et êtes en connaissance des nombres n et k. Déterminez pour quelles valeurs de n et k il existe une stratégie pour sortir du château à tout coup. Expliquez cette stratégie et montrez qu'elle fonctionne.

   Solution:

   On va montrer qu'il existe une stratégie pour sortir du château pour toute valeur de n et k. Il est clair que si $k = 1$ on peut sortir du château. Dans chaque pièce, on étiquette les portes de gauche à droite par $0, 1, \ldots, k-1$. Il y a k^n séquences de portes différentes qu'on exprime à l'aide de suites de n chiffres de 0 à $k-1$ où le i-ème chiffre de la suite correspond à une porte de la pièce i. Une de ces suites est la façon de sortir du château. On ordonne les suites dans l'ordre lexicographique et on les essaie dans cet ordre. Afin de tester une suite, on doit traverser les portes en suivant la suite et en débutant le trajet dans la pièce 1. Supposons que l'on essaie la suite $d_1 d_2 \cdots d_n$. On choisit un nombre $m \neq d_1$ et on traverse la porte m n fois avant d'emprunter la suite $d_1, d_2, \ldots, d_n$ dans l'ordre. Si la porte d_1 est la première porte à emprunter pour sortir du château, alors passer par la porte m n fois nous assure de se trouver dans la pièce 1. Si la porte d_1 n'est pas la première porte, alors $d_1 d_2 \cdots d_n$ n'est pas la bonne suite. Il n'est donc pas important de la tester à partir de la pièce 1. On a donc une façon de tester chaque suite et aussi de s'assurer d'être au bon point de départ au moment de tester la suite qui nous permettra de sortir du château. Il est donc toujours possible de s'en sortir!