La Repêchage de qualification de l'OMC de la Financière Sun Life 2016

Financière Sun Life

1. (a) Trouvez tous les entiers positifs n tels que $11|(3^n + 4^n)$.

   (b) Trouvez tous les entiers positifs n tels que $31|(4^n + 7^n + 20^n)$.

2. Soit $P = (7, 1)$ et $O = (0, 0)$.

   (a) Si S est un point sur la droite $y = x$ et T est un point sur l'axe des x (l'axe horizontal) de façon à ce que P soit sur la droite ST, déterminez la valeur minimale de l'aire du triangle OST.

   (b) Si U est un point sur la droite $y = x$ et V est un point sur l'axe des x (l'axe horizontal) de façon à ce que P soit sur la droite UV, déterminez la valeur minimale du périmètre du triangle OUV.

3. Étant donnée une grille de cubes unitaires de dimension $n \times n \times n$, un cube est dit *bon* s'il s'agit d'un sous-cube de la grille dont le côté mesure au moins deux unités. Si un bon cube contient un autre bon cube et que leurs faces ne se touchent pas, le second est appelé un *sous-cube propre* du premier. Quelle est la taille du plus grand ensemble de bons cubes tel qu'aucun des cubes de cet ensemble n'est un sous-cube propre d'un autre cube de l'ensemble?

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + f(x - f(y)) = x.$$

5. Soit P un polygone convexe à n côtés dont le périmètre est P_0. Soit P_1 le périmètre du polygone Q dont les sommets sont les points milieu des côtés de P. Montrez que $P_1 \geq \frac{P_0}{2}$.

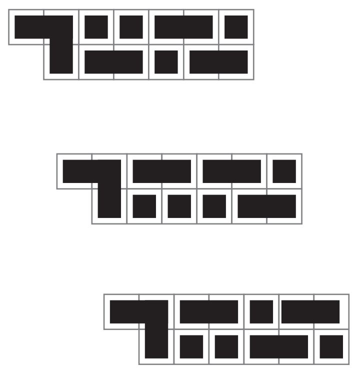
6. Trouvez tous les triplets ordonnés d'entiers positifs (x, y, z) qui sont tels que $\mathrm{PGCD}(x+y, y+z, z+x) > \mathrm{PGCD}(x, y, z)$.

7. En débutant au point $(0, 0)$, Richard fait $2n + 1$ pas. Chaque pas consiste à se déplacer d'une unité vers l'est, le nord, l'ouest ou le sud. Pour chaque pas, la direction est choisie aléatoirement avec la même probabilité pour chaque direction. Déterminez la probabilité que Richard termine son trajet au point $(1, 0)$.

8. Soit $n \geq 3$ un entier positif. Une *grille ébréchée de taille* n est un damier de dimension $2 \times n$ dont la case inférieure gauche a été enlevée. Lino veut paver une grille ébréchée de taille n en utilisant deux types de tuiles:

   - Type 1: toute tuile $1 \times k$ où $1 \leq k \leq n$
   - Type 2: toute tuile de la forme d'une grille ébréchée de taille k où $1 \leq k \leq n$ qui doit nécessairement recouvrir la case la plus à gauche de la grille $2 \times n$.

Deux pavages T_1 et T_2 sont considérés les mêmes s'il y a un ensemble de tuiles consécutives de type 1 dans chacune des rangées de T_1 qui peuvent être échangées verticalement afin d'obtenir T_2. Par exemple, les trois pavages suivants de la grille ébréchée de taille 7 sont les mêmes:



Pour tout entier positif n et tout entier positif $1 \leq m \leq 2n-1$, soit $c_{m,n}$ le nombre de pavages distincts d'une grille ébréchée de taille n qui utilisent exactement m tuiles (n'importe quelle combinaison de type de tuiles peut être utilisée) et définissons

$$P_n(x) = \sum_{m=1}^{2n-1} c_{m,n} x^m.$$

Trouvez, avec justification, des polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tel que

$$P_n(x) = f(x)P_{n-1}(x) + g(x)P_{n-2}(x)$$

pour tout $n \geq 3$.