Le Repêchage de qualification de l'OMC 2017

Financière Sun Life

Examen

1. Malcolm écrit un entier positif sur un papier. Malcolm double cet entier et soustrait 1 et il écrit le résultat sur le même papier. Malcolm double ensuite le deuxième entier et ajoute 1 et il écrit le résultat sur le papier. Si tous les nombres que Malcolm a écrit sur le papier sont premiers, déterminer toutes les valeurs possibles du premier entier.

2. Deux entiers positifs sont dits premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1. Si n est un entier positif, on dénote par $\phi(n)$ le nombre d'entiers k dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que k et n sont premiers ente eux. Déterminer la valeur maximale de $\dfrac{n}{\phi(n)}$ pour n dans l'ensemble $\{2, \ldots, 1000\}$ et toutes les valeurs de n pour lesquelles cette valeur maximale est atteinte.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation
$$(x + y)f(x - y) = f(x^2 - y^2)$$
pour toutes les valeurs réelles de x et y.

4. Dans cette question on redéfinit l'addition et la multiplication des réels comme suit: $a + b$ est défini comme étant le minimum de a et b, et $a * b$ est défini comme étant la somme de a et b. Par exemple, $3 + 4 = 3$, $3 * 4 = 7$, et $3 * 4^2 + 5 * 4 + 7 = \min(3 \text{ plus } 4 \text{ plus } 4, 5 \text{ plus } 4, 7) = \min(11, 9, 7) = 7$.

   Soient a, b, c des nombres réels. Décrire, en fonction de a, b, c, l'allure du graphe de la fonction $y = ax^2 + bx + c$.

5. Montrer que l'inégalité
$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \geq 0$$
est vraie pour tous les nombres réels x et y. Déterminer quand est ce qu'on a l'égalité.

6. Soit N un entier positif. Il y a N tâches, numérotées $1, 2, 3, \ldots, N$, qu'on doit compléter. Chaque tâche prend une minute pour compléter et les tâches doivent être complétées selon les conditions suivantes:

   • N'importe quel nombre de tâches peut être complété en même temps.

   • Pour tout entier positif k, la tâche numéro k commence immédiatement après que toutes les tâches dont les numéros sont des diviseurs de k, excluant k, soient complétées.

   • Tâche 1 est la première tâche à commencer, et elle commence par elle-même.

   Supposer que $N = 2017$. Combien de minutes faut-il pour que toutes les tâches soient complétées? Quelles tâches sont les dernières à compléter?

7. Étant donné un ensemble $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on définit une *liste de préférence* comme étant un sous-ensemble ordonné de S_n. Soit P_n le nombre de listes de préférence de S_n. Montrer que si m et n sont deux entiers positifs tels que $n > m$, alors $P_n - P_m$ est divisible par $n - m$.

   Remarque: l'ensemble vide et S_n sont des sous-ensembles de S_n.

8. On dit q'un quadrilatère convexe $ABCD$ est *divisible* si pour tout point intérieur P, la somme des aires des triangles PAB et PCD est égale à la somme des aires des triangles PBC et PDA. Caractériser tous les quadrilatères qui sont divisibles.

