Le Repêchage de qualification de l'OMC 2017

Financière Sun Life

Solutions officielles

1. Malcolm écrit un entier positif sur un papier. Malcolm double cet entier et soustrait 1 et il écrit le résultat sur le même papier. Malcolm double ensuite le deuxième entier et ajoute 1 et il écrit le résultat sur le papier. Si tous les nombres que Malcolm a écrit sur le papier sont premiers, déterminer toutes les valeurs possibles du premier entier.

   Solution : Soit n le premier entier. Alors $2n-1$ est le deuxième et $4n-1$ est le troisième. On peut écrire n comme $3k$, $3k+1$, ou $3k+2$ pour un certain entier non négatif k.

   Si $n = 3k$, on doit avoir $k = 1$, car n est premier. Dans ce cas, les trois nombres sont 3, 5, 11, qui sont premiers.

   Si $n = 3k+1$, on a $4n-1 = 12k+3 = 3(4k+1)$. Comme c'est un multiple de 3, $3(4k+1 = 1$ (car n est premier) et alors $k = 0$. Ceci implique que $n = 1$, et le premier nombre écrit n'est pas premier.

   Si $n = 3k+2$, on a $2n-1 = 6k+3 = 3(2k+1)$. Comme c'est un multiple de 3, $3(4k+1) = 1$ (car n est premier) et alors $k = 0$. Dans ce cas, les trois nombres sont 2, 3, 7, qui sont premiers.

   Alors, le premier entier est 2 ou 3.

2. Deux entiers positifs sont dits premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1. Si n est un entier positif, on dénote par $\phi(n)$ le nombre d'entiers k dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que k et n sont premiers ente eux. Déterminer la valeur maximale de $\dfrac{n}{\phi(n)}$ pour n dans l'ensemble $\{2, \ldots, 1000\}$ et toutes les valeurs de n pour lesquelles cette valeur maximale est atteinte.

   Solution : Supposons que les diviseurs premiers de n sont $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Alors

$$\frac{n}{\phi(n)} = \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right) \cdot \left(\frac{p_2}{p_2 - 1}\right) \cdots \left(\frac{p_k}{p_k - 1}\right)$$

   Comme la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ est positive et décroissante pour $x > 0$, on doit choisir notre entier de sorte qu'il a le plus grand nombre possible de petits diviseurs premiers. Comme $n \le 1000$ on peut avoir au plus 4 diviseurs premiers avec 2, 3, 5, et 7 sont les plus petits. Alors

$$\frac{n}{\phi(n)} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{8}.$$

   Les nombres inférieurs à 1000 et qui ont 2, 3, 5, et 7 comme diviseurs sont les multiples de 210. Alors le maximum est atteint pour 210, 420, 630, et 840.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation

$$(x + y)f(x - y) = f(x^2 - y^2)$$

pour toutes les valeurs réelles de x et y.

Solution: Soit t un nombre réel, et soit $x = \frac{t+1}{2}$ et $y = \frac{t-1}{2}$. En remplaçant dans l'équation donnée, on obtient $f(t) = tf(1)$ pour tout nombre réel t. Si on pose $f(1) = m$, on obtient que $f(t) = mt$ pour chaque nombre réel m.

4. Dans cette question on redéfinit l'addition et la multiplication des réels comme suit: $a + b$ est défini comme étant le minimum de a et b, et $a * b$ est défini comme étant la somme de a et b. Par exemple, $3 + 4 = 3$, $3 * 4 = 7$, et $3 * 4^2 + 5 * 4 + 7 = \min(3 \text{ plus } 4 \text{ plus } 4, 5 \text{ plus } 4, 7) = \min(11, 9, 7) = 7$.

Soient a, b, c des nombres réels. Décrire, en fonction de a, b, c, l'allure du graphe de la fonction $y = ax^2 + bx + c$.

Solution : $y = ax^2 + bx + c$ devient $y = \min(2x + a, x + b, c)$.

Si $2b = a + c$, les trois droites $y = 2x + a$, $y = x + b$, et $y = c$ se coupent au point $(c - b, c)$. De plus, si $2b > a + c$, la droite $y = x + b$ est au-dessus d'au moins une des deux autres droites. Dans ce cas, le graphe est:

$$\begin{array}{ll} 2x + a & x < \frac{c-a}{2} \\ c & x \geq \frac{c-a}{2} \end{array}$$

Si $2b < a + b$, la droite $y = x + b$ est au-dessous des deux autres droites pour $b - a < x < c - b$. Dans ce cas, le graphe est:

$$\begin{array}{ll} 2x + a & x \leq b - a \\ x + b & b - a < x < c - b \\ c & c - b \leq x \end{array}$$

5. Montrer que l'inégalité

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \geq 0$$

est vraie pour tous les nombres réels x et y. Déterminer quand est ce qu'on a l'égalité.

Solution: En développant et refactorisant le côté gauche de l'inégalité on obtient

$$(xy + 1)^2 + (x + y - 2)^2.$$

Cette expression est clairement non-négative, alors l'inégalité est satisfaite. On obtient l'égalité lorsque chacun des termes est nul. Alors $xy = -1$ et $x + y = 2$. La solution de ce système nous donne $(x, y) = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

6. Soit N un entier positif. Il y a N tâches, numérotées $1, 2, 3, \ldots, N$, qu'on doit compléter. Chaque tâche prend une minute pour compléter et les tâches doivent être complétées selon les conditions suivantes:

   • N'importe quel nombre de tâches peut être complété en même temps.

   • Pour tout entier positif k, la tâche numéro k commence immédiatement après que toutes les tâches dont les numéros sont des diviseurs de k, excluant k, soient complétées.

   • Tâche 1 est la première tâche à commencer, et elle commence par elle-même.

   Supposer que $N = 2017$. Combien de minutes faut-il pour que toutes les tâches soient complétées? Quelles tâches sont les dernières à compléter?

   Solution : Pour un entier positif $n > 1$, soit $f(n)$ le nombre des facteurs premiers (pas nécessairement distincts) dans la factorisation de n en nombres premiers. On montre qu'il faut attendre $f(n)$ minutes avant que la tâche n commence. La preuve est faite par induction sur le nombre $f(n)$ des facteurs premiers de n. Chaque entier n tel que $f(n) = 1$ est premier. Comme les seuls diviseurs d'un nombre premier sont 1 et le nombre lui-même, ces tâches commencent juste après que la tâche 1 soit complète. Comme la tâche 1 prend une minute, tâche n doit attendre une minute. Alors le résultat est vrai pour tous les entiers avec un seul facteur premier. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tous les entiers avec au plus k facteurs premiers. Soit n un entier ayant $k + 1$ facteurs premiers. Par l'hypothèse d'induction, la tâche p est soit complètées soit qu'elle doit attendre k minutes avant qu'elle commence pour tout diviseur premier p de n. Comme la durée de chaque tâche est d'une minute, touts ces tâches sont complétées au bout de $k + 1$ minutes. Ceci termine la preuve par induction.

   Pour $N = 2017$, noter que $2^{10} = 1024$ est la plus grande puissance de 2 inférieure à 2017. Ceci implique que tout nombre inférieur à 2017 admet au plus 10 facteurs premiers car le plus petit nombre avec 11 facteurs premiers est $2^{11} = 2048 > 2017$. Alors, par le résultat ci-haut, toutes les tâches doivent attendre au plus 10 minutes avant qu'elles commencent, avec tâche 1024 devant attendre 10 minutes pour commencer. Alors, les tâches prennent 11 minutes pour être complétées.

   Finalement, les tâches finales à compléter sont celles qui ont 10 facteurs premiers. La plus petite telle tâche est $2^{10} = 1024$. Le plus grand nombre suivant ayant 10 facteurs premiers est $2^9 \times 3 = 1536$. Les candidats suivants sont $2^8 \times 3^2 = 256 \times 9 = 2304$ et $2^9 \times 5 = 2560$, qui sont supérieurs à 2017. Alors, tâches 1024 et 1536 sont les dernières à compléter.

7. Étant donné un ensemble $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, on définit une *liste de préférence* comme étant un sous-ensemble ordonné de S_n. Soit P_n le nombre de listes de préférence de S_n. Montrer que si m et n sont deux entiers positifs tels que $n > m$, alors $P_n - P_m$ est divisible par $n - m$.

   Remarque: l'ensemble vide et S_n sont des sous-ensembles de S_n.

Solution : Si $n = m + 1$, le résultat est clairement vrai. Alors, on peut supposer que $n - m > 1$. Soit T_n l'ensemble de listes de préférence de S_n, et $T_{n,m}$ l'ensemble de listes de préférence de S_n, qui contiennent un élément de S_n plus grand que m. Remarquer que $T_n = T_m \cup T_{n,m}$ ce qui donne que $P_n - P_m = |T_{n,m}|$.

Soient $T_{n,m}^k$ les listes de préférence de $T_{n,m}$ dans lesquelles le premier élément dans la liste qui est supérieur à m est k. Considérer une bijection sur S_n qui envoie k à j, j à k, et chaque autre élément à lui-même. Alors cette bijection envoie $T_{n,m}^k$ à $T_{n,m}^j$ et réciproquement. Dans chaque direction, la correspondance des éléments entre les ensembles est biunivoque, ce qui signifie qu'il s'agit d'une bijection. Alors $|T_{n,m}^k| = |T_{n,m}^j|$ pour chaque $j, k \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$. Comme $T_{n,m} = \bigcup\limits_{k=m+1}^{n} T_{n,m}^k$ et les ensembles $T_{n,m}^k$ ont le même nombre d'éléments, $|T_{n,m}|$ est divisible par $n - m$.

8. On dit q'un quadrilatère convexe $ABCD$ est *divisible* si pour tout point intérieur P, la somme des aires des triangles PAB et PCD est égale à la somme des aires des triangles PBC et PDA. Caractériser tous les quadrilatères qui sont divisibles.

   Solution : Supposer que $ABCD$ est un parallélogramme. Alors pour tout point P à l'intérieur de $ABCD$, la somme des aires des triangles PAB et PCD est égale à la moitié de l'aire de $ABCD$ et alors égale à la somme des aires des triangles PBC et PDA.

   Supposer que $ABCD$ est divisible, et considérer une droite ℓ parallèle à AB et qui a une intersection avec l'intérieur de $ABCD$. Pour n'importe quels deux points P et Q sur ℓ, l'aire du triangle PAB est égale à celle du triangle QAB. Pour que celui-ci soit divisible, les deux triangles PCD et QCD doivent avoir la même aire. Ceci est seulement possible si ℓ est aussi parallèle à CD. Alors, AB est parallèle à CD. Similairement, on trouve que BC est parallèle à DA ce qui implique que $ABCD$ est un parallélogramme. Alors, $ABCD$ est divisible si et seulement si il est un parallélogramme.

