2018 Repêchage de qualification de l'OMC

Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://cms.math.ca/Concours/commanditaires/

Examen officiel

1. Trouvez toutes les solutions du système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3 \\ x = 4y^3 + 12y^2 + 12y + 3 \end{cases}$$

2. Une paire de polygones p et q est dite *emboîtable* si l'on peut en dessiner un à l'intérieur de l'autre, possiblement après lui avoir fait faire une rotation et/ou une réflexion. Sinon, la paire de polygones est dite *non emboîtable*.

   Soit p et q des polygones. Démontrez que l'on peut trouver un polygone r semblable à q tel que r et p sont non emboîtables si et seulement si p et q ne sont pas semblables.

3. Soit ABC un triangle tel que $AB = BC$. Démontrez que $\triangle ABC$ est obtus si et seulement si l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

   a deux solutions réelles distinctes, où A, B et C sont les angles du triangle en radians.

4. Construisez un polygone convexe tel que chacun de ses côtés a la même longueur qu'une de ses diagonales et que chacune de ses diagonales a la même longueur qu'un de ses côtés ou démontrez qu'un tel polygone n'existe pas.

5. Un palindrome est un nombre qui garde la même valeur lorsqu'on inverse l'ordre des chiffres qui le composent. Soit n un produit de nombres premiers distincts qui n'est pas divisible par 10. Démontrez que l'ensemble $\{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ contient une infinité de palindromes.

6. Soit $n \geq 2$ un entier positif. Déterminez le nombre de n-tuplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_k \in \{0, 1, 2\}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k$ est divisible par 3.

7. Soit n un entier positif dont la factorisation en nombres premiers est

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

pour des nombres premiers distincts $p_1, \ldots, p_r$, et e_i des entiers strictement positifs. On définit

$$rad(n) = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

le produit de tous les facteurs premiers distincts de n.

Déterminez tous les polynômes $P(x)$ à coefficients rationnels tels qu'il existe une infinité d'entiers positifs n qui satisfont $P(n) = rad(n)$.

8. Soit n et k des entiers positifs tels que $1 \leq k \leq n$. Un paquet de cartes numérotées de 1 à n sont disposées au hasard en rangée de la gauche vers la droite. Une personne exécute les deux types de mouvements suivants en alternance:

   (a) La carte la plus à gauche de la rangée est déplacée de $k-1$ positions vers la droite tandis que les cartes aux positions 2 à k sont toutes déplacées d'une position vers la gauche.

   (b) La carte la plus à droite de la rangée est déplacée de $k-1$ positions vers la gauche tandis que les cartes aux positions $n-k+1$ à $n-1$ sont toutes déplacées d'une position vers la droite.

   Déterminez la probabilité qu'après un certain nombre de mouvements, les cartes soient disposées dans l'ordre, de 1 à n, de la gauche vers la droite.