

# 2019 Repêchage de qualification de l'OMC

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.



Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : <https://smc.math.ca/Concours/Commanditaires/>

## Examen officiel

1. Une fonction  $f$  est dite injective si lorsque  $f(n) = f(m)$ , alors  $n = m$ . Supposons que  $f$  est injective et que

$$\frac{1}{f(n)} + \frac{1}{f(m)} = \frac{4}{f(n) + f(m)}.$$

Démontrez que  $m = n$ .

2. Rosemonde empile des sphères pour former des pyramides. Elle construit deux types de pyramides  $S_n$  et  $T_n$ . La pyramide  $S_n$  compte  $n$  étages, où l'étage du haut est une seule sphère et le  $i^{\text{e}}$  étage est un carré de sphères  $i \times i$  pour  $2 \leq i \leq n$ . La pyramide  $T_n$  compte  $n$  étages, où l'étage du haut est une seule sphère et le  $i^{\text{e}}$  étage est formé de  $\frac{i(i+1)}{2}$  sphères qui forment un triangle équilatéral pour  $2 \leq i \leq n$ .  
Si toutes les sphères ont un rayon de longueur 2, déterminez la plus petite valeur  $n$  telle que la différence entre la hauteur de  $S_n$  et la hauteur de  $T_n$  est supérieure à 2019.
3. Soit  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$  dont les racines sont  $a, b$  et  $c$ .
  - (a) Trouvez la valeur de  $a^3 + b^3 + c^3$ .
  - (b) Trouvez toutes les valeurs possibles de  $a^2b + b^2c + c^2a$ .
4. Soit  $n$  un entier positif. Pour un entier positif  $m$ , on partitionne l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  en  $n$  sous-ensembles, de façon à ce que le produit de deux éléments différents d'un même sous-ensemble ne soit jamais un carré parfait. En fonction de  $n$ , trouvez le plus grand entier  $m$  pour lequel une telle partition existe.

5. Soit  $(m, n, N)$  un triplet d'entiers positifs. Benoit et Gabriel jouent à un jeu sur une grille  $m \times n$  où toutes les cases contiennent initialement le nombre zéro. Les règles du jeu sont les suivantes.
- Les joueurs jouent à tour de rôle et Benoit débute.
  - À son tour, Benoit choisit une ligne et ajoute 1 à toutes les cases de la ligne ou soustrait 1 à toutes les cases de la ligne.
  - À son tour, Gabriel choisit une colonne et ajoute 1 à toutes les cases de la colonne ou soustrait 1 à toutes les cases de la colonne.
  - Benoit remporte la partie si à un certain moment, il y a une entrée  $x$  telle que  $|x| \geq N$ .

Déterminez tous les triplets  $(m, n, N)$  qui font que peu importe le jeu de Gabriel, Benoit a une stratégie gagnante.

6. Soit un pentagone  $ABCDE$  dans le plan. Soit  $F$  le point de rencontre de la droite  $CD$  et de sa perpendiculaire passant par  $A$ ,  $G$  le point de rencontre de la droite  $DE$  et de sa perpendiculaire passant par  $B$ ,  $H$  le point de rencontre de la droite  $EA$  et de sa perpendiculaire passant par  $C$ ,  $I$  le point de rencontre de la droite  $AB$  et de sa perpendiculaire passant par  $D$  et  $J$  le point de rencontre de la droite  $BC$  et de sa perpendiculaire passant par  $E$ . Si les droites  $AF, BG, CH$  et  $DI$  sont concourantes, montrez qu'elles sont aussi concourantes avec la droite  $EJ$ .
7. Il y a  $n$  passagers dans une file, attendant l'embarquement dans un avion de  $n$  places. Pour  $1 \leq k \leq n$ , le  $k^{\text{e}}$  passager de la file a un billet pour le  $k^{\text{e}}$  siège. Par contre, le premier passager ignore son billet et s'assoit sur un siège au hasard. Par la suite, les passagers s'assoient de la façon suivante : si le siège indiqué sur son billet est vide, le passager en question s'assoit sur ce siège. Dans le cas contraire, il choisit un siège au hasard. De combien de façons les  $n$  passagers peuvent-ils être assis ?
8. Pour  $t \geq 2$ , on définit  $S(t)$  comme le nombre de fois que  $t$  divise  $t!$ . On dit qu'un nombre  $t$  est un *sommet* si  $S(t) > S(u)$  pour toutes les valeurs  $u < t$ .  
Démontrez ou réfutez l'affirmation suivante :  
Pour tout nombre premier  $p$ , il existe un entier  $k$  tel que  $p$  divise  $k$  et  $k$  est un sommet.