2020 Repêchage de qualification de l'OMC

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://smc.math.ca/Concours/Commanditaires/

Examen officiel

1. Démontrer que pour tout entier $a \geq 1$, nous avons

$$\lfloor \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9a+8} \rfloor.$$

2. Soit S un ensemble d'entiers. Une *partition optimale* de S en deux ensembles T et U est une partition qui minimise la valeur $|t-u|$, où t et u sont les sommes des éléments de T et U, respectivement.

   Soit P un ensemble d'entiers positifs distincts tel que la somme des éléments de P est $2k$ pour un entier $k > 0$ et tel qu'il n'existe pas de sous ensemble de P dont la somme des éléments est k.

   Démontrer soit qu'il existe un tel ensemble P admettant au moins 2020 partitions optimales distinctes, soit qu'un tel P n'existe pas.

3. Soit N un entier positif et $A = a_1, a_2, \ldots, a_N$ une suite de nombres réels. Définissons la suite $f(A)$ comme étant

$$f(A) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{N-1} + a_N}{2}, \frac{a_N + a_1}{2} \right)$$

   et pour un entier positif k, définissons $f^k(A)$ comme étant f appliquée à A k fois : $f^k(A) = f(f \ldots (f(A)) \ldots)$.

   Trouver toutes les suites $A = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ de nombres entiers telles que $f^k(A)$ ne contient que des entiers pour tout k.

4. Déterminer tous les graphes G vérifiant les deux propriétés suivantes :

   — G contient au moins un chemin hamiltonien.

   — Pour tout couple de sommets, $u, v \in G$, s'il existe un chemin hamiltonien de u à v, alors l'arête uv est dans le graphe G.

© 2020 Société mathématique du Canada

5. Définissons les suites suivantes :

   — La suite A telle que $a_n = n$.

   — La suite B telle que $b_n = a_n$ si $a_n \not\equiv 0 \pmod 3$ et $b_n = 0$ sinon.

   — La suite C telle que $c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

   — La suite D telle que $d_n = c_n$ si $c_n \not\equiv 0 \pmod 3$ et $d_n = 0$ sinon.

   — La suite E telle que $e_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

   Démontrer que les termes de la suite E sont les cubes parfaits.

6. Dans un pentagone convexe $ABCDE$, le segment AC est parallèle à DE, l'arête AB est perpendiculaire à AE, et BC est perpendiculaire à CD. Si H est l'orthocentre du triangle ABC et M est le point milieu du segment DE, démontrer que AD, CE et HM sont concourants.

7. Soient a, b, c des nombres réels positifs tels que $ab + bc + ac = abc$. Démontrer que

$$\frac{bc}{a^{a+1}} + \frac{ac}{b^{b+1}} + \frac{ab}{c^{c+1}} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Trouver tous les couples de nombres rationnels positifs (a, b) tels que $\sqrt[b]{a} = ab$.